Prof. Dr. M. Reineke **WiSe 2014/15**
Dr. M. Boos

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

1. Selbsttest

Keine Abgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen je wahr oder falsch sind und kreuzen Sie Ihre Wahl an (wahr / falsch).

1. Es seien G eine Gruppe, $g \in G$ ein Element und $e \in G$ das neutrale Element.

◯◯ a) Ist $g = g^{-1}$, so gilt $g = e$.

◯◯ b) Für das neutrale Element gilt $e = e^{-1}$.

◯◯ c) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}^{+}$, so dass für alle $g \in G$ gilt $g \cdot n = e$, so ist G endlich.

◯◯ d) Gibt es zu jedem $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}^{+}$ mit $g \cdot n = e$, so ist G endlich.

◯◯ e) Der Durchschnitt endlich vieler Untergruppen von G ist eine Untergruppe.

◯◯ f) Die Vereinigung endlich vieler Untergruppen von G ist eine Untergruppe.

2. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

◯◯ a) Das Einselement ist in keinem Ideal von R enthalten.

◯◯ b) Das Einselement ist in genau einem Ideal von R enthalten.

◯◯ c) Das Einselement ist in allen Idealen von R enthalten.

◯◯ d) Die Menge der Nullteiler bildet ein Ideal in R.

◯◯ e) Die Menge der invertierbaren Elemente bildet einen Teilring von R.

◯◯ f) Die Menge der Nullteiler bildet einen Teilring von R.

◯◯ g) Kein Element von R ist invertierbar und gleichzeitig Nullteiler.

3. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

◯◯ a) Ist R nullteilerfrei, so ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper.

◯◯ b) Ist jedes Element außer 0 in R invertierbar, so ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper.

◯◯ c) Ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper, so ist R nullteilerfrei.

◯◯ d) Ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper, so ist in R jedes Element auer 0 invertierbar.

4. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

◯◯ a) Jedes Ideal von K ist ein Hauptideal.

◯◯ b) Jedes Element von K ist invertierbar.

◯◯ c) Die Menge der invertierbaren Elemente bildet ein Ideal in K.

◯◯ d) K^n mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist faktoriell.

◯◯ e) K^n mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist ein Körper.

5. Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, X eine Menge und I, J und I_x für $x \in X$ Ideale von R.

◯◯ a) Es ist IJ ein Ideal in R.

◯◯ b) Es ist $I + J$ ein Ideal in R.

◯◯ c) Es ist $I \cap J$ ein Ideal in R.

◯◯ d) Es ist $I \cup J$ ein Ideal in R.

◯◯ e) Es ist $\bigcap_{x \in X} I_x$ ein Ideal in R.

◯◯ f) Es ist $\bigcup_{x \in X} I_x$ ein Ideal in R.

6. Es sei R ein Integritätsring.

◯◯ a) Jedes prime Element ist irreduzibel.

◯◯ b) Jedes irreduzible Element ist prim.