

Übung 9 zur Analysis I

Georg Biedermann
20.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]

Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\sqrt[n]{-}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig.

Aufgabe 2:[10 Punkte]

Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Die Betragsfunktion $|-|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.
2. Die Funktion

$$\varphi = \max\{f, g\}: I \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

und

$$\vartheta = \min\{f, g\}: I \rightarrow \mathbb{R}, \vartheta(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

sind stetig. (Tipp: Drücken Sie φ und ϑ mit Hilfe von f, g und $|-|$ aus!)

Aufgabe 3:[10 Punkte]

Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n.$$

Bestimmen Sie die punktweise Grenzfunktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f stetig oder nicht stetig ist, und beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4:[10 Punkte]

Sei die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ wenn } x = \frac{m}{n} \text{ und } m, n \text{ teilerfremd} \\ 0 & , \text{ für } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f in allen $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ und $x_0 = 0$ stetig und für alle $x_0 \in \mathbb{Q} \cap]0, 1]$ nicht stetig ist.

Abgabe: 27.6.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe der ε - δ -Definition, dass die folgenden Funktionen stetig sind:

1. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^2$
2. $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \frac{1}{x}$
3. $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Menge der Berührungspunkte von

1. $U_\delta(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$
2. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\{e^{iq} \mid q \in \mathbb{Q}\}$