Übung 9 zur Analysis I

Georg Biedermann
20.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\sqrt[n]{-}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \geq 0$ gegeben.
1. Fall $x_0 > 0$: Wähle
$$\delta = \min\left\{\frac{x_0}{2}\,,\, \varepsilon \cdot x_0^{\frac{n}{n-1}}\right\} > 0.$$
Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta \leq \frac{x_0}{2}$ die Ungleichung $x > \frac{x_0}{2}$. Und daraus folgt:
$$\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k (\sqrt[n]{x_0})^{n-k-1} > \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} (\sqrt[n]{x_0})^k (\sqrt[n]{x_0})^{n-k-1} > (\sqrt[n]{x_0})^{n-1} = x_0^{\frac{n-1}{n}}$$
Jetzt können wir eine binomische Formel anwenden.
$$(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}) \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k (\sqrt[n]{x_0})^{n-k-1} = x - x_0$$
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt nach der Wahl von δ oben:
$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| = |x - x_0| \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k (\sqrt[n]{x_0})^{n-k-1} \right|^{-1} < |x - x_0| \cdot x_0^{\frac{n}{n-1}} < \varepsilon$$
Damit ist die n-te Wurzelfunktion bei $x_0 > 0$ stetig.
2. Fall $x_0 = 0$: Wähle $\delta = \varepsilon^n$. Dann gilt für alle $0 \leq x < \delta$:
$$|\sqrt[n]{x}| = \sqrt[n]{x} < \varepsilon.$$
Also ist die n-te Wurzelfunktion auch bei $x_0 = 0$ stetig.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Die Betragsfunktion $|-|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.
2. Die Funktion
$$\varphi = \max\{f, g\}\colon I \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
und
$$\vartheta = \min\{f, g\}\colon I \to \mathbb{R}, \vartheta(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
sind stetig. (Tipp: Drücken Sie φ und ϑ mit Hilfe von f, g und $|-|$ aus!)

Lösung: 1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $z \in U_\delta(z_0)$:

$$\big||z| - |z_0|\big| \leq |z - z_0| < \delta = \varepsilon.$$

Also ist die Betragsfunktion in jedem $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig.

2. Es gilt:

$$\varphi = \max\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big)$$

und

$$\vartheta = \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big).$$

Die Funktion $|f - g|\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x) - g(x)|$ ist die Hintereinanderausführung der stetigen Funktionen $f - g$ (stetig, weil f und g stetig sind) und $|-|$, also selbst stetig. Dann ist aber auch die Summe

$$\varphi = \max\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big)$$

stetig. Weil $|f - g|$ stetig ist, ist auch $(-1) \cdot |f - g| = -|f - g|$ stetig. Dann ist auch die Summe

$$\vartheta = \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$$

stetig.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n\colon\ [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^n.$$

Bestimmen Sie die punktweise Grenzfunktion $f\colon\ [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f stetig oder nicht stetig ist, und beweisen Sie ihre Antwort.

Lösung: Wir bestimmen zuerst den punktweisen Limes der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $0 \leq x < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Für $x = 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Also ist der punktweise Limes die Funktion

$$f\colon\ [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ für } x = 1 \end{cases}$$

Beh: Die Funktion f ist für alle $0 \leq x_0 < 1$ stetig. Sei $\delta = \frac{1-x_0}{2}$. Dann gilt für alle $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$$f(x) = 0 = f(x_0) \;\text{ also } |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Beh: Die Funktion f ist bei $x_0 = 1$ nicht stetig. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $\delta > 0$ und $x \in [0,1] \cap U_\delta(1) =]\frac{1}{2}, 1]$:

$$f\big(]\frac{1}{2}, 1]\big) = \{0, 1\} \not\subseteq \,]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\, = U_{\frac{1}{2}}(1).$$

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Sei die Funktion $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ wenn } \; x = \frac{m}{n} \; \text{ und } \; m, n \; \text{ teilerfremd} \\ 0 & , \text{ für } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f in allen $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ und $x_0 = 0$ stetig und für alle $x_0 \in \mathbb{Q} \cap \,]0, 1]$ nicht stetig ist.

Lösung: 1. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit bei 0. Es gilt für alle $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq x$$

Für beliebiges ε setze $\delta = \varepsilon$ und es folgt für alle $0 \leq x < \delta$:

$$|f(x)| = f(x) \leq x < \delta = \varepsilon.$$

Damit ist f bei 0 stetig.

2. Sei jetzt $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Dann ist $f(x_0) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\ell \in \mathbb{N}$, so dass $\ell > \varepsilon^{-1}$, d.h. $\frac{1}{\ell} < \varepsilon$. Betrachte die Menge

$$M_\ell = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \,|\, m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n \leq \ell \right\}.$$

Diese Menge ist endlich. Deshalb existiert die folgende Zahl

$$\delta = \min\{|y - x_0| \,|\, y \in M_\ell\}.$$

Weil x_0 irrational ist, ist $\delta > 0$.

Wenn x irrational ist, dann gilt $f(x) = 0 = f(x_0)$. Wenn x rational und $|x - x_0| < \delta$, dann gilt:

$$f(x) = \frac{1}{q} \;\text{ mit }\; q > \ell.$$

Insbesondere folgt für alle $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap [0,1]$:

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x) \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{\ell} < \varepsilon.$$

Also ist f bei x_0 stetig.

3. Schließlich ist noch zu zeigen, dass f für $x_0 \in \mathbb{Q}, 0 < x_0 \leq 1$ nicht stetig ist. Dazu sei $x_0 = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann ist $f(x_0) = \frac{1}{n}$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2n}$.

Wir können eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ finden, die gegen x_0 konvergiert. Setze z.B.

$$y_n = x_0 - \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Wenn $y_n \in \mathbb{Q}$ wäre, dann wäre auch $2(x_0 - y_n) = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Wir wissen aber, dass das nicht der Fall ist. Also $y_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Weiter gilt offensichtlich

$$\lim_{n \to \infty} y_n = x_0 - \sqrt{2} \lim_{n \to \infty} n^{-1} = x_0.$$

Daraus folgt auch, dass fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) der y_n in $[0,1]$ liegen. Jetzt gilt aber für fast alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f(y_n) = 0 \implies \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 0 \neq \frac{1}{n} = f(\frac{m}{n}) = f(x_0).$$

Das widerspricht aber dem Satz 10.26 aus dem Skript. Also kann f bei $x_0 \in \mathbb{Q}$ nicht stetig sein.