Übung 8 zur Analysis I

Georg Biedermann
13.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n-1)x^n}{4^{2n}n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Zeigen Sie die folgende Identität nach Jakob Bernoulli:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius. (Tipp: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst.)

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Satzes:

$$\begin{aligned} t_n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$: $t_n \leq s_n$ und $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e$. ($e$ Eulersche Zahl)

3. Für alle $n \geq m$ gilt:

$$t_n \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

4. Für alle $n \geq m$ gilt: $\liminf_{n\to\infty} t_n \geq s_m$.

5. Die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(Tipp: Sie können ohne Beweis die Aussage von Lemma 6.22 aus dem Skript benutzen.)

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Es gelten dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 3.

1. Zeigen Sie
$$e - s_n \leq \frac{1}{n! \cdot n}.$$
Man sieht, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sehr schnell konvergiert. Berechnen Sie von Hand eine Näherung von e bis auf einen Fehler von höchstens $0{,}002$.

2. Nehmen Sie an, dass es $p, q \in \mathbb{N}$ gibt mit $e = \frac{p}{q}$. Zeigen Sie, dass dann
$$q! \cdot e\,,\ q! \cdot s_q\,,\ q!(e - s_q) \in \mathbb{N}.$$
Schließen Sie daraus, dass e irrational ist.

Abgabe: 20.6.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08