Übung 8 zur Analysis I

Georg Biedermann

13.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n-1)x^n}{4^{2n}n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$

Lösung: 1. geometrische Reihe $r = 1$.
2. $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{4^{2n}n^2 7^{n+1}n}{7^n(n-1)4^{2n+2}(n+1)^2} = \frac{7}{16} \lim_n \frac{n^3}{(n-1)(n+1)^3} = \frac{7}{16}$
Damit ist der Konvergenzradius $\frac{16}{7}$.
3. $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \lim_n \sqrt[n]{n^3} = \frac{1}{2} \left(\lim_n \sqrt[n]{n}\right)^3 = \frac{1}{2}$ denn $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. Also ist der Konvergenzradius 2.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Zeigen Sie die folgende Identität nach Jakob Bernoulli:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius. (Tipp: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst.)

Lösung: Beachte:

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} x^i x^j = (n+1)x^n.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^i x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der geometrischen Reihe ist 1. Nach dem Satz über das Cauchy-Produkt ist dann der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ mindestens

1. Aber für jedes $x \in \mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{C}$) mit $|x| > 1$ ist die Folge $\big((n+1)x^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, also kann die zughörige Reihe nicht mehr konvergieren. Es folgt, dass der Konvergenzradius genau 1 ist. (Man sieht leicht, dass aus demselben Grund die Reihe auch für $x = \pm 1$ divergiert.)

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Satzes

$$\begin{aligned} t_n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$: $t_n \leq s_n$ und $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e$. ($e$ Eulersche Zahl)

3. Für alle $n \geq m$ gilt:

$$t_n \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

4. Für alle $n \geq m$: $\liminf_{n\to\infty} t_n \geq s_m$

5. Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Lösung: 1. Es gilt:

$$\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

Damit:

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = t_n \end{aligned}$$

2. Es gilt für alle $k \geq 1$:

$$0 < \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < 1$$

Daher gilt für alle n:

$$t_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Insbesondere gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n = e.$$

3. Weil alle Terme in der Summe positiv sind, gilt für alle $n \geq m$:

$$t_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

4. In der Ungleichung 3. bilden wir jetzt den Limes für $n \to \infty$. Also gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \geq 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m.$$

5. Wir sammeln alle Resultate auf.

$$e = \lim_{m\to\infty} s_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n = e$$

Es folgt, dass alle Ungleichungen in Wirklichkeit Gleichungen sind. Damit wissen wir jetzt, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert e.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Es gelten dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 3.

1. Zeigen Sie
$$e - s_n \leq \frac{1}{n! \cdot n}.$$
Man sieht, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sehr schnell konvergiert. Berechnen Sie von Hand eine Näherung von e bis auf einen Fehler von höchstens $0,002$.

2. Nehmen Sie an, dass es $p, q \in \mathbb{N}$ gibt mit $e = \frac{p}{q}$. Zeigen Sie, dass dann
$$q! \cdot e\,,\ q! \cdot s_q\,,\ q!(e - s_q) \in \mathbb{N}.$$
Schließen Sie daraus, dass e irrational ist.

Lösung: 1. Nach Definition der s_n und e gilt:

$$\begin{aligned} e - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n! \cdot n} \end{aligned}$$

(Um die Abschätzung einzusehen, ist es am einfachsten, sich die ersten 3 bis 4 Summanden explizit hinzuschreiben.) Mit dieser Fehlerabschätzung rechnen wir:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \\ &= 2 + \frac{60+20+5+1}{120} = 2 + \frac{86}{120} = 2 + \frac{43}{60} = 2,71\overline{6} \end{aligned}$$

Wir wissen

$$0 < e - \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{5! \cdot 5} = \frac{1}{600} = 0,001\overline{6} < 0,002$$

Damit wissen wir z.B.:

$$2,71\overline{6} \leq e \leq 2,71\overline{6} + 0,001\overline{6} < 2.7184$$

2. Wir nehmen an, dass es $p, q \in \mathbb{N}$ gibt mit $e = \frac{p}{q}$. Dann sieht man aber

$$q! \cdot e = q! \cdot \frac{p}{q} = p \cdot (q-1)! \in \mathbb{N}.$$

Genauso ist

$$q! \cdot s_q = \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} \in \mathbb{N},$$

denn für $n \leq q$ gilt:

$$\frac{q!}{n!} = \prod_{j=n+1}^{q} j = q(q-1) \cdots (q-n+1).$$

Damit ist jetzt natürlich auch $q!(e - s_q) = q!e - q!s_q)$ eine natürliche Zahl (weil $0 < s_q < e$). Wir wissen aber aus 1.:

$$0 < e - s_q \leq \frac{1}{q!q} \implies 0 < q!(e - s_q) \leq \frac{1}{q} < 1.$$

Es gibt aber keine natürliche Zahl zwischen 0 und 1. Also war die Annahme falsch: $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.