Übung 7 zur Analysis I

Georg Biedermann
6.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Es sei
$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & , \text{ für } n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & , \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, aber das Quotientenkriterium nicht anwendbar ist.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Sei $M \subset \mathbb{N}$ die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen, deren Primfaktorzerlegung (Existenz und Eindeutigkeit seien vorausgesetzt) nur Potenzen von 2 und 3 enthält; also
$$M = \{2, 3, 6, 8, 9, 12, 16, 18, \ldots\}.$$
Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$
konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert. (Tipp: Betrachten Sie die geometrische Reihe bzgl. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.)

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Beweisen Sie:

1. Konvergiert die folgenden Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$?
2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^{ns}$ für $s \in \mathbb{R}$ konvergiert absolut für alle $c, z \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$. (Eigentlich haben wir z^s nur für $s \in \mathbb{Q}$ definiert, aber das wird sich bald ändern.)
3. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
(Die Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ heißt Exponentialfunktion!)

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Es geht um das Reihenverdichtungskriterium nach Cauchy.

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

2. Zeigen Sie, dass für $p > 1$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

konvergiert. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass

- aus $0 < x < y$ folgt: $\ln x < \ln y$.
- für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gilt: $\ln(b^a) = a \ln b$.

Abgabe: 13.6.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Untersuchen Sie auf Konvergenz und Divergenz:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$

Aufgabe: (Tipp zu Aufgabe 2) Sei $N \in \mathbb{N}$. Veranschaulichen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} Q_N &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, 0 \leq m, n \leq N\} \\ \Delta_N &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, 0 \leq m + n \leq N\} \end{aligned}$$

Seien jetzt $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen. Zeigen Sie:

$$\sum_{(m,n)\in\Delta_N} a_m b_n \leq \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_m b_n \leq \sum_{(m,n)\in\Delta_{2N}} a_m b_n.$$