Übung 7 zur Analysis I

Georg Biedermann
6.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Es sei

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & , \text{ für } n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & , \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, aber das Quotientenkriterium nicht anwendbar ist.

Lösung: Es gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3} & , \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2},$$

und die absolute Konvergenz der Reihe folgt aus dem Wurzelkriterium.

Sie können alternativ auch zeigen, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n}.$$

Das zeigt, dass die geometrische Reihe für 2^{-1} eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist. Also konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Gleichzeitig gilt aber auch:

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{3^{2n-1}}{2^{2n}} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \to \infty$$
$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{2^{2n}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \to 0$$

für $n \to \infty$. Also ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Sei $M \subset \mathbb{N}$ die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen, deren Primfaktorzerlegung (Existenz und Eindeutigkeit seien vorausgesetzt) nur Potenzen von 2 und 3 enthält; also

$$M = \{2, 3, 6, 8, 9, 12, 16, 18, \ldots\}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n\in M} \frac{1}{n}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert. (Tipp: Betrachten Sie die geometrische Reihe bzgl. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.)

Bemerkung: Druckfehler! $M = \{2, 3, \mathbf{4}, 6, 8, 9, \ldots\}$

Bemerkung für den interessierten Studenten: Weil jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat, kann man durch Hinzufügen der restlichen Primzahlen $p = 5, 7, 11, \ldots$ erreichen, dass die Menge M ganz $\mathbb{N}$ wird. Damit kann man die folgende Gleichung beweisen, die auf Euler zurückgeht:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

wobei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen sei. Dies ist ein neuer Beweis der Tatsache, dass es unendliche viele Primzahlen gibt; denn wäre die Menge $\mathcal{P}$ endlich, so wäre die rechte Seite ein endliches Produkt und damit würde auf der linken Seite für $s = 1$ die harmonische Reihe konvergieren!

Lösung: Wenn man auf einer Achse die Potenzen von 2 und auf einer anderen Achse die Potenzen von 3 aufträgt und auf den Gitterpunkte die Produkte $2^m \cdot 3^n$

$$\begin{array}{c|cccccc}
\vdots & \vdots & & & & & \\
3^2 & 3^2 & 2\cdot 3^2 & 2^2\cdot 3^2 & 2^3\cdot 3^2 & & \\
3 & 3 & 2\cdot 3 & 2^2\cdot 3 & 2^3\cdot 3 & 2^4\cdot 3 & \ldots \\
1 & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & \ldots \\
\hline
 & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & \ldots
\end{array}$$

dann ist die Menge aller dieser Produkte genau $M \cup \{1\}$. Wenn wir zum Inversen übergehen, stehen auf der Achse die Summanden der geometrischen Reihe. Diese konvergieren absolut und wir können den Satz über Cauchy-Produkte anwenden. Nach Definition des Cauchy-Produktes gilt dann aber

$$\sum_{n\in M} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\right) - 1 = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) - 1 = 2\cdot\frac{3}{2} - 1 = 2.$$

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Beweisen Sie:

1. Konvergiert die folgenden Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$?

2. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^{ns}$ für $s \in \mathbb{R}$ konvergiert absolut für alle $c, z \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$. (Eigentlich haben wir z^s nur für $s \in \mathbb{Q}$ definiert, aber das wird sich bald ändern.)

3. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
(Die Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ heißt Exponentialfunktion!)

Lösung: 1. Nach der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Damit rechnen wir weiter:

$$\left| \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} \right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Also folgt mit $q = \frac{1}{2}$ aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ absolut konvergiert.

2. Mit $u_n = c^{n^2} z^{ns}$ gilt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = c^{(n+1)^2 - n^2} z^s = c^{2n+1} z^s,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |z|^s \lim_{n \to \infty} |c|^{2n+1} = 0 < 1$$

denn $|c| < 1$. Das Quotientenkriterium impliziert die Behauptung.

3. Wir benutzen wieder das Quotientenkriterium:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{n! \cdot z^{n+1}}{(n+1)! \cdot z^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

für alle $z \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Es geht um das Reihenverdichtungskriterium nach Cauchy.

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

2. Zeigen Sie, dass für $p > 1$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

konvergiert. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass

- aus $0 < x < y$ folgt: $\ln x < \ln y$.

- für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gilt: $\ln(b^a) = a \ln b$.

Lösung: 1. Wir zeigen die Äquivalenz, indem wir beide Richtungen einzeln zeigen.

"$\Rightarrow$" Sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b$ konvergent. Für $k \geq 1$ betrachte man die Teilsumme

$$A_k = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_k.$$

Weil die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und weil es in A_k genau 2^{k-1} Summanden gibt, folgt:

$$A_k \geq 2^{k-1} a_{2^k}$$

Dann gilt

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_K \geq a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_k \quad (*)$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist eine konvergente Majorante für die rechte Seite. Bis auf einen fehlenden Faktor 2 in den Termen für $n \geq 1$ Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, denn hier werden die Terme ab $n = 1$ nur nochmal verdoppelt.

Alternativ: Aus $(*)$ folgt, dass die Partialsummen

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} a_k$$

beschränkt sind durch b. Dann sind aber auch die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ beschränkt, z.B. gegen $2b$. Nach dem Monotoniekriterium folgt dann die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

"$\Leftarrow$" Sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent. Wir betrachten wieder Teilsummen:

$$B_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k} = 2^k a_{2^k},$$

weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. Um die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

für $p > 1$ zu zeigen, wenden wir das Reihenverdichtungskriterium an.

Man muß zuerst zeigen, dass die Folge $\left(\frac{1}{n(\ln n)^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Weil aber nach dem Tipp ln monoton steigend ist, folgt, dass $\left((1/\ln n)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Weil aber die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist das gliedweise Produkt der beiden Folgen auch monoton fallend.

Wir betrachten jetzt

$$\frac{2^n}{2^n(\ln(2^n))^p} = (\ln 2)^{-p}\frac{1}{n^p}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(\ln(2^n))^p} = (\ln 2)^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

Aber diese letzte Reihe konvergiert für $p > 1$, wie wir schon früher gezeigt haben. Nach dem Reihenverdichtungskriterium konvergiert also auch die ursprüngliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$, wenn $p > 1$.

Abgabe: 13.6.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08