Übung 6 zur Analysis I

Georg Biedermann
30.5.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Beschreiben Sie Ihre Rechnungen kurz, aber präzise. Wir benutzen die Schreibweise

$$[a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots]_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} \dots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-1} b^{-2} + \dots$$

mit $a_j \in \{0, \dots, b-1\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, um einen b-adischen Bruch bzgl. einer Basis $b \neq 10$ zu bezeichnen.

1. Stellen Sie den b-adischen Bruch $[0, \overline{23}]_b$ für $b = 4$ und $b = 10$ als gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$ dar.
2. Entwickeln Sie $\frac{1}{7}$ als b-adischen Bruch für $b = 2$ und $b = 10$.

Lösung: 1. Man beachte, dass bzgl. der Basis b

$$[23]_b = 2 \cdot b + 3 \begin{cases} 11 & , \text{ für } b = 4 \\ \\ 23 & , \text{ für } b = 10 \end{cases}$$

Damit:

$$[0, \overline{23}]_b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[23]_b}{b^{2k}} = [23]_b \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (b^{-2})^k = [23]_b \cdot \left(\frac{1}{1 - b^{-2}} - 1 \right) = \begin{cases} \left[\frac{23}{33}\right]_4 = \frac{11}{15} & , \text{ für } b = 4 \\ \\ \frac{23}{99} & , \text{ für } b = 10 \end{cases}$$

2. Zuerst für $b = 10$. Wir teilen 10 durch 7 mit Rest:

$$\begin{array}{rcl} 1 = a_0 \cdot 7 + b_0 & \Longrightarrow & a_0 = 0, b_0 = 1 \\ \hline 10 = a_1 \cdot 7 + b_1 & \Longrightarrow & a_1 = 1, b_1 = 3 \\ 30 = a_2 \cdot 7 + b_2 & \Longrightarrow & a_2 = 4, b_2 = 2 \\ 20 = a_3 \cdot 7 + b_3 & \Longrightarrow & a_2 = 2, b_2 = 6 \\ 60 = a_4 \cdot 7 + b_4 & \Longrightarrow & a_4 = 8, b_4 = 4 \\ 40 = a_5 \cdot 7 + b_5 & \Longrightarrow & a_5 = 5, b_5 = 5 \\ 50 = a_6 \cdot 7 + b_6 & \Longrightarrow & a_2 = 7, b_6 = 1 = b_0 \end{array}$$

Also im Dezimalsystem gilt:

$$\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}.$$

Jetzt für $b = 2$. Wir teilen 7 durch 2 mit Rest:

$$\begin{array}{rcl} [1]_2 = 1 = a_0 \cdot 7 + b_0 & \Longrightarrow & a_0 = 0, b_0 = 1 \\ \hline [10]_2 = 2 = a_1 \cdot 7 + b_1 & \Longrightarrow & a_1 = 0, b_1 = 1 \\ [100]_2 = 4 = a_2 \cdot 7 + b_2 & \Longrightarrow & a_2 = 0, b_2 = 1 \\ [1000]_2 = 8 = a_3 \cdot 7 + b_3 & \Longrightarrow & a_3 = 1, b_3 = 1 = b_0 \end{array}$$

Also im dyadischen System gilt:

$$\frac{1}{7} = [0,\overline{001}]_2.$$

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Beweisen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt.

Lösung: Wir erinnern zuerst an die Definition:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \,|\, k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{mit} \quad S_n = \sup\{a_k \,|\, k \geq n\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \,|\, k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} I_n \quad \text{mit} \quad I_n = \inf\{a_k \,|\, k \geq n\}.$$

Zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ bedeutet:

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N : |a - S_n| < \varepsilon.$$

Weil $S_n = \sup\{a_k \,|\, k \geq n\} \geq a_k$ für alle $k \geq n$, gilt für alle $k \geq n \geq N$, dass a_k nicht größer als $a + \epsilon$ sein kann; also

$$a_k \leq a + \varepsilon \implies a_k - a < \varepsilon,$$

wobei $a_k - a$ aber kleiner als Null sein kann.

Die Bedingung $\lim_{n\to\infty} I_n = a$ bedeutet:

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N : |a - I_n| < \varepsilon.$$

Weil $I_n = \sup\{a_k \,|\, k \geq n\} \geq a_k$ für alle $k \geq n$, gilt für alle $k \geq n \geq N$, dass a_k nicht kleiner als $a - \epsilon$ sein kann; also

$$a_k \geq a - \varepsilon \implies a - a_k < \varepsilon,$$

wobei $a_k - a$ aber kleiner als Null sein kann.

Beides zusammen genommen ergibt: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq N$

$$\big(a_k - a < \varepsilon \ \text{ und } \ a_k - a < \varepsilon\big) \iff |a - a_k| < \varepsilon$$

gilt. Quot erat demonstrandum.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Geben Sie einen zur Vorlesung alternativen Beweis der Existenz k-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Wählen Sie dazu ein geeignetes Intervall I_0, von dem Sie wissen, dass die k-te Wurzel (falls sie existiert) enthalten ist. Definieren Sie dann eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem Sie das vorherige Intervall (wie in einigen Beweisen der Vorlesung) halbieren. Zeigen Sie dann, dass das durch die Intervallschachtelung bestimmte Element y eine k-te Wurzel von a ist, indem Sie den Abstand $|y^k - a|$ abschätzen.

Lösung: Für $a = 1$ gibt es nichts zu beweisen. Die k-te Wurzel existiert.

Wenn $a > 1$, dann setzen wir $I_0 = [A_0, B_0] = [1, a]$. Es gilt dann sicherlich

$$A_0^k = 1^k = 1 < a < a^k = B_0^k.$$

Wenn $0 < a < 1$, dann setzen wir $I_0 = [0, 1]$. Wie oben gilt mit $A_0 = 0$ und $B_0 = 1$:

$$A_0^k = 0 < a < 1 = B_0^k.$$

(Eine andere Möglichkeit, I_0 zu wählen, ist $[0, a + 1]$. Damit spart man sich eine Fallunterscheidung.)

Wir definieren jetzt eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv. Seien die ersten $I_0, \ldots, I_n$ schon definiert. Wenn $I_n = [A_n, B_n]$, dann setze $M = \frac{A_n+B_n}{2}$. Falls $M^k \geq a$, so setze $I_{n+1} = [A_n, M]$. Ansonsten setze $I_{n+1} = [M, B_n]$.

Wir behaupten jetzt, dass die $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung sind. Es gilt offensichtlich $I_n \subset I_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{diam}(I_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(I_0),$$

und damit ist $(\operatorname{diam}(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Nullfolge. Damit ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in \bigcap_{n\geq 0} I_n$.

Man beachte, dass wir die Intervalle $I_n = [A_n, B_n]$ immer so konstruiert haben, dass

$$A_n^k \leq a \leq B_n^k.$$

Dann gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a - y^k| \leq |A_n^k - B_n^k| = |A_n - B_n| \cdot \left|\sum_{j=1}^{k} A_n^j B_n^{k-j}\right|$$

Weil $A_n < B_n \leq B_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kann man weiter abschätzen:

$$|a - y^k| \leq |A_n - B_n| \cdot \left| \sum_{j=1}^{k} A_n^j B_n^{k-j} \right| \leq |A_n - B_n| \cdot k \cdot B_0^k \leq 2^{-n} C$$

mit $C = kB_0^k |A_0 - B_0|$ konstant. Damit folgt $a = y^k$.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Geben Sie einen zur Vorlesung alternativen Beweis der Existenz k-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$. Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^k < a\}$$

ein Supremum y besitzt. Beweisen Sie dann $y^k = a$, indem Sie die Aussagen $y^k < a$ und $y^k > a$ zum Widerspruch führen.

Lösung: Sei $a > 0$ und $k \geq 2$ gegeben. Es gilt sicherlich $\frac{a}{a+1} \in M$, denn

$$0 < \frac{a}{a+1} < a \implies \left(\frac{a}{a+1}\right)^k < a^k.$$

Insbesondere $M \neq \varnothing$. Außerdem können wir (z.B. nach dem archimedischen Axiom) ein $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $n > a$. Dann ist $n^k > a$ und n eine obere Schranke für M. (Man beachte, dass man nicht einfach $\sqrt[k]{a}$ als obere Schranke wählen kann, denn dessen Existenz soll ja erst bewisen werden!) Nach dem Satz über die Existenz von Suprema folgt, dass M ein Supremum $\sup M = y > 0$ besitzt.

Annahme: $y^k < a$. Wir werden zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $(y + \delta) \in M$. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\delta < \min \left\{ \frac{1}{2}, (a - y^k) \left((y+1)^k - y^k \right)^{-1} \right\}.$$

Das ist wohldefiniert, denn $(y + 1)^k - y^k > 0$ und $a - y^k > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(y+\delta)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^{k-j} \delta^j = y^k + \delta \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} y^{k-j} \delta^{j-1} \\
&\overset{0<\delta<\frac{1}{2}<1}{<} y^k + \delta \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} y^{k-j} = y^k + \delta\big((y+1)^k - y^k\big) \\
&< y^k + (a - y^k) = a
\end{aligned}$$

Hier folgt die letzte Ungleichung aus der Wahl von δ. Daher ist $y + \delta \in M$ und y ist nicht das Supremum von M. Widerspruch!

Annahme: $y^k > a$. Wir werden jetzt zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $(y-\delta)^k > a$. Wir möchten gerne folgende Abschätzungen machen:

$$\begin{aligned}(y-\delta)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-\delta)^j y^{k-j} = y^k - \delta \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-\delta)^{j-1} y^{k-j} \\ &\geq y^k - \delta \cdot \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} y^{k-j} = y^k - \delta\big((y+1)^k - y^k\big) > a\end{aligned}$$

Für die erste Ungleichung reicht es $0 < \delta < 1$ zu wählen. Für die zweite Ungleichung muss gelten:

$$\delta\big((y+1)^k - y^k\big) \leq y^k - a.$$

Wähle also $\delta > 0$, so dass

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{2}, y, (y^k - a)\left((y+1)^k - y^k\right)^{-1}\right\}.$$

Damit sind die obigen Abschätzungen korrekt. Wir bestehen auch auf $\delta < y$, so dass $y - \delta > 0$.

Insgesamt folgt also $(y-\delta)^k > a$. Damit ist $y - \delta$ eine obere Schranke für M, die echt kleiner als $y = \sup M$ ist. Das ist ein Widerspruch.

Alles in allem bleibt y nichts anderes übrig, als die Gleichung $y^k = a$ zu lösen.

Abgabe: 6.6.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08