Übung 5 zur Analysis I

Georg Biedermann
16.5.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Beweisen Sie die folgende Version der Dreiecksungleichung im Komplexen:

$$\forall\ z, w \in \mathbb{C}\ \big||z| - |w|\big| \leq |z - w|.$$

Zeigen Sie damit: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein komplexe Zahlenfolge, die gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|z|$ konvergiert.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
In dieser Aufgabe geht es um sogenannte *Teleskopsummen.*

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{C}$. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k).$$

2. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ als Teleskopsumme.

3. Zeigen Sie mit Teil 2 die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Schätzen Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

gegen eine geometrische Reihe ab und folgern Sie daraus die Konvergenz der Reihe. Der Grenzwert der Reihe definiert die *Eulersche Zahl* e!

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Beweisen Sie, die Konvergenz oder Divergenz der folgenden Reihen. Im Falle der Konvergenz geben Sie den Grenzwert an.

1. $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell} 2^{\ell-1}}{5^{\ell}}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+2n+1}$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$

Abgabe: 30.5.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz. Können Sie den Grenzwert berechnen, falls er existiert?

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ (Tip: Teleskopsumme)
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n+1}$