# Übung 5 zur Analysis I

Georg Biedermann
16.5.2018

**Aufgabe 1:**[10 Punkte]
Beweisen Sie die folgende Version der Dreiecksungleichung im Komplexen:

$$\forall\ z, w \in \mathbb{C}\ \big||z| - |w|\big| \leq |z - w|.$$

Zeigen Sie damit: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein komplexe Zahlenfolge, die gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|z|$ konvergiert.

**Lösung:** Teil 1: Der Beweis der Ungleichung geht analog zum Beweis in $\mathbb{R}$ aus der Vorlesung. Man setze Setze $\zeta = z - w$. Dann folgt mit der schon bewiesenen Form der Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$:

$$|z| = |\zeta + w| \leq |\zeta| + |w| = |z - w| + |w|$$

Also:

$$|z| - |w| \leq |z - w| \tag{0.1}$$

Setze jetzt $\xi = w - z$. Dann folgt wie oben:

$$|w| = |z + \xi| \leq |z| + |\xi| = |z| + |w - z| = |z| + |z - w|$$

Also:

$$|w| - |z| \leq |z - w| \tag{0.2}$$

Beide Ungleichungen 0.1 und 0.2 zusammen ergeben die Aussage (5).

Teil 2: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein komplexe Zahlenfolge, die gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ (mit Teil 1)

$$\Big||z| - |z_n|\Big| \leq |z - z_n| < \varepsilon$$

gilt. Das besagt gerade:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|.$$

**Aufgabe 2:**[10 Punkte]
In dieser Aufgabe geht es um sogenannte *Teleskopsummen*.

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{C}$. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k).$$

2. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ als Teleskopsumme.

3. Zeigen Sie mit Teil 2 die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Lösung:** Teil 1 ist ein einfacher Induktionsbeweis.

Teil 2: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dann folgt aus Teil 1:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Durch Grenzübergang:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} s_k = 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 1.$$

Teil 3: Wir wollen die Abschätzung $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ und dann Teil 2 benutzen. Für die Partialsummen mit $k \geq 2$ folgt:

$$\begin{aligned} t_k &:= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 + s_{k-1} < 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Hier ist $s_{k-1}$ wie im Teil 2 definiert. Die Folge der Partialsummen $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also nach oben beschränkt. Gleichzeitig ist diese Folge monoton steigend, denn

$$t_k - t_{k-1} = \frac{1}{k^2} > 0.$$

Also konvergiert die Folge der Partialsummen – und damit die Reihe – nach dem Satz über monotone beschränkte Folgen.

**Aufgabe 3:**[10 Punkte]
Schätzen Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

gegen eine geometrische Reihe ab und folgern Sie daraus die Konvergenz der Reihe. Der Grenzwert der Reihe definiert die *Eulersche Zahl* $e$!

**Lösung:** Für $n \geq 2$ gilt $n! \geq 2^{n-1}$ und damit

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Also haben wir eine Abschätzung gegen eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3$$

(Und tatsächlich ist $e < 3$ richtig!) Die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ bilden eine monoton steigende Folge, von der wir gerade eine obere Schranke hergeleitet haben. Also konvergiert die Folge der Partialsummen und damit die Reihe nach dem Satz über monotone beschränkte Folgen.

**Aufgabe 4:**[10 Punkte]
Beweisen Sie, die Konvergenz oder Divergenz der folgenden Reihen. Im Falle der Konvergenz geben Sie den Grenzwert an.

1. $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell} 2^{\ell-1}}{5^{\ell}}$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+2n+1}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$

**Lösung:** 1. Es gilt $\frac{(-1)^{\ell} 2^{\ell-1}}{5^{\ell}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{\ell}$. Geometrische Reihe!

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell} 2^{\ell-1}}{5^{\ell}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{\ell} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{\ell}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{5}} - 1\right) = -\frac{1}{7}$$

2. Es gilt $\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$. Also:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \left((1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots\right)$$

Wenn wir jetzt gerade und ungerade Indizes getrennt aufsummieren, können wir daraus jeweils eine Teleskopsumme bilden. Setze

$$s_k = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Für $k \geq 2$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
s_{2k} &= \sum_{n=2}^{2k} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k}) + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \sum_{n=1}^{k-1} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
s_{2k+1} &= \sum_{n=2}^{2k+1} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) + (\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \sum_{n=1}^{k} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k+2}
\end{aligned}$$

Im Limes für $k \to \infty$ konvergieren beide Folgen $(s_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(s_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{3}{2}$. Damit folgt:

$$\lim_{k \to \infty} s_k = \frac{3}{2}.$$

Insgesamt haben wir also:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

3. Der Grad des Polynoms im Zähler ist größer als der Grad des Nenners. Außerdem sind sämtliche involvierten Terme positiv. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+2n+1}$ bestimmt gegen $+\infty$.

4. Berechne $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} \right)$!

Warnung: Es gilt nicht ohne weitere Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Reihen, d.h. unendliche Summen, verhalten sich nicht immer wie endliche Summen. Insbesondere gilt weder das Assoziativ- noch das Kommutativgesetz!

In diesem Fall ist trotzdem wahr, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k},$$

aber wir haben den entsprechenden Satz noch nicht bewiesen.

Das Problem taucht überhaupt nicht auf, wenn Sie (wie ich es Ihnen empfehle) mit den Partialsummen argumentieren. Diese sind endliche Summen und Sie können umsortieren, wie Sie wollen! Also:

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3^k}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n+1}}{1+\frac{1}{3}}$$

Im Limes für $n \to \infty$ gilt also:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n+1}}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=2,75.$$

**Abgabe: 31.5.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08**