# Übung 4 zur Analysis I

Georg Biedermann
9.5.2018

**Aufgabe 1:**[10 Punkte]
Untersuchen Sie die folgenden Folgen aus Konvergenz und Divergenz und begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösung:** 1. Die Folge $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$, denn der Nenner von

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}}$$

konvergiert gegen 1, während der Zähler unbeschränkt ist.
2. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \leq \frac{1}{n},$$

denn aus $1 \leq j \leq n$ folgt $0 < j/n \leq 1$. Die Folge ist eingequetscht zwischen 0 und $\frac{1}{n}$. Nach dem Sandwichsatz konvergiert die Folge $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ also gegen 0.
3. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$0 < \frac{2}{n} \leq 1.$$

Deswegen:

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{2}{j} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}.$$

Wie in Teil 2 konvergiert $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0, weil wir sie gegen eine Nullfolge abgeschätzt haben.

**Aufgabe 2:**[10 Punkte]
Untersuchen Sie die folgenden Folgen aus Konvergenz und Divergenz und begründen Sie Ihre Antwort. Dabei ist $i$ die imaginäre Einheit. Wenn eine Folge konvergiert, so schreiben Sie den Grenzwert in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\left(\frac{i^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\left(\frac{(n+1)^2+in}{3n+2in^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. $\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösung:** 1. Die Folge $\left(\frac{i^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{i^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

2. Der Term $3 + \frac{2i}{n}$ konvergiert gegn 3, daher können wir nach einem Satz der Vorlesung den Grenzwert in den Quotienten ziehen und es gilt:

$$\lim_n \frac{(n+1)^2+in}{3n+2in^2} = \frac{1+\lim_n \frac{2+i}{n} + \lim_n \frac{1}{n}}{3+\lim_n \frac{2i}{n}} = \frac{1}{3}$$

3. Die Folge $\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, denn sie nimmt der Reihe nach die folgenden acht Werte an:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1$$

**Aufgabe 3:**[10 Punkte]
Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge ist, die bestimmt gegen $+\infty$ konvergiert, dann ist die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

**Lösung:** Im Skript!

**Aufgabe 4:**[10 Punkte]
Beweisen Sie: Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a$ konvergiert, so konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ebenfalls gegen $a$.

**Lösung:** Betrachte die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Es gilt:

$$a - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{na-1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a-a_k}{n}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wie im Beweis des Satzes, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist, existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann setzen wir

$$M = \max\{|a| + \frac{\varepsilon}{2}, |a - a_1|, |a - a_2|, \ldots, |a - a_{N-1}|\}.$$

Man beachte, dass $M \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Wähle jetzt $n \geq \max\{N+1, \frac{2(N-1)M}{\varepsilon}\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2(N-1)M} \quad \text{und} \quad 0 < \frac{n-(N-1)}{n} < 1,$$

und es folgt

$$\left| a - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a - a_k}{n} \right| \leq \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{a - a_k}{n} \right| + \sum_{k=N}^{n} \left| \frac{a - a_k}{n} \right|$$

$$\leq \frac{(N-1)M}{n} + \frac{n-(N-1)}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

## Abgabe: 16.5.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

## Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

1. $\left(\frac{(-1)^k}{k-1}\right)_{k\geq 2}$
2. $(n - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\left(\frac{4n^5+n}{2-n^2-7n^5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(\frac{4n^5+n}{2-n^2+7n^6}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $\left(\frac{m!}{m!+1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$
6. $\left(\frac{n!}{(n-1)!^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
7. $\left(\frac{3+(-1)^n n^3}{1+3n+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

1. $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \left|\frac{(-1)^k}{k-1}\right| \leq \frac{1}{k+1} \to 0$ für $k \to \infty$

2. $\forall\ n \in \mathbb{N}\ n - \frac{1}{n} \geq n - 1 \to \infty$ für $n \to \infty$

3. Es gilt $\lim_n \frac{2}{n^5} - \frac{1}{n^3} - 7 = -7$. Daher gilt nach einem Satz der Vorlesung

$$\lim_n \frac{4n^5 + n}{2 - n^2 - 7n^5} = \frac{4 + \lim_n \frac{1}{n^4}}{\lim_n \frac{2}{n^5} - \lim_n \frac{1}{n^3} - 7} = -\frac{4}{7}.$$

4. Es gilt $\lim_n \frac{2}{n^6} - \frac{1}{n^4} + 7 = 7$. Daher gilt nach einem Satz der Vorlesung

$$\lim_n \frac{4n^5 + n}{2 - n^2 + 7n^6} = \frac{\lim_n \frac{4}{n} + \lim_n \frac{1}{n^5}}{\lim_n \frac{2}{n^6} - \lim_n \frac{1}{n^4} + 7} = 0.$$

5. Es gilt $\lim_m (1 + \frac{1}{m!}) = 1$. Daher gilt nach einem Satz der Vorlesung

$$\lim_m \frac{m!}{m! + 1} = \frac{1}{1 + \lim_m \frac{1}{m!}} = 1.$$

6. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$\frac{n!}{(n-1)!^2} = \frac{n}{(n-1)!} \leq \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} < \frac{3}{n-2}$$

Also konvergiert die Folge $\left(\frac{n!}{(n-1)!^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0.

7. Die Folge $\left(\frac{3+(-1)^n n^3}{1+3n+n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert. Beweissketch: kürze mit $n^2$, dann konvergiert der Nenner gegen 1 und der Zähler ist unbeschränkt.