Übung 3 zur Analysis I

Georg Biedermann
2.5.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Schreiben die ersten sieben Zeilen des Pascalschen Dreiecks auf. Benutzen Sie Binomialformel und lesen Sie daraus die Darstellung von $(a+b)^6$ für $a, b \in \mathbb{C}$ als Summe ab. Berechnen Sie damit $(2+i)^6, (x+1)^6, (2i-1)^6$. Dabei ist x eine Variable und i die imaginäre Einheit. (Eine Berechnung durch explizites Ausmultiplizieren wird nicht anerkannt!)

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Aufgabe 3:[10 Punkte]

1. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}$$

   (Tipp: vollständige Induktion und Indexverschiebung)

2. Folgern Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

   gilt.

3. Berechnen Sie die Summe für $n = 1, 2, 3$ und $x = \pm 1, 0, \pm\frac{1}{2}, 2$.

4. Formulieren Sie (ohne Beweis) eine Vermutung, was passiert, wenn in 3. jeweils n größer und größer werden läßt.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Überlegen Sie sich, ob die folgenden Folgen in $\mathbb{C}$ beschränkt sind, und begründen

Sie Ihre Antwort sorgfältig.

$$\begin{aligned}
&(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
&(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } b_n = i^n \\
&(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } c_n = (2+i)^n \\
&(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit } d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

Abgabe: 9.5.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(i - \frac{1}{2})^2, (i - \frac{1}{2})^3, \frac{4i}{5 + (i+1)^2}, (2+2i)(4 - \frac{i}{2})$$

Aufgabe: Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Formeln

$$z + \overline{z} = r \operatorname{Re}(z), z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

Aufgabe: Beschreiben Sie folgende Punkte auf der kompexen Zahlenebene:

$$i^n, (1+i)^n, \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$$