Übung 2 zur Analysis I

Georg Biedermann
25.4.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$. Zeigen Sie mitttels vollständiger Induktion: $|P(M)| = 2^n$.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung: für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Beweisen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
2. $|z| \geq 0$ und $(z = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0)$
3. $|z| = |\overline{z}|$ und $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
4. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re} z$ und $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im} z$
5. Das zu $z \neq 0$ inverse Element ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Berechnen Sie dann $\frac{1-i}{1+i}$.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Sei $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ die Menge der 2×2-Matrizen mit reellen Koeffizienten. Weiter betrachten wir folgende Teilmenge von Matrizen:

$$C := \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{C} \to C\ ,\ \varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Körperisomorphismus ist. Berechnen Sie $\varphi(i)$, $\varphi(-i)$, $\varphi(1)$ und $\varphi(-1)$.

Abgabe: 2.5.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Beweisen Sie in einem angeordnete Körper K: für alle $a, b \in K$

$$
\begin{array}{lll}
(1)\ a > b \text{ und } b > c & \Rightarrow & a > c \quad \text{(Transitivität)} \\
(2)\ a > b & \Rightarrow & a + c > b + c \\
(3)\ a > b & \Rightarrow & -a < -b \\
(4)\ a > b \text{ und } c > 0 & \Rightarrow & a \cdot c > b \cdot c \\
(5)\ a > b \text{ und } c < 0 & \Rightarrow & a \cdot c < b \cdot c \\
(6)\ 1 > 0 \text{ d.h. } 1 \in K_+ & & \\
(7)\ \forall a \in K - \{0\}\ a^2 > 0 & &
\end{array}
$$

Aufgabe: Schreiben Sie die folgeden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$:

$$i^6, |4+3i|, (2+3i)^2, \frac{i}{2-i}, \left(1/\overline{1+4i}\right)^2$$

Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ zugeordnete lineare Abbildung. Für $a^2 + b^2 = 1$ ist dies die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn, wobei $\sin\alpha = b$ und $\cos\alpha = a$.

Aufgabe: Beschreiben Sie den Körper $\mathbb{F}_2$, indem Sie die Additions- und Multiplikationstafel aufschreiben. Überlegen Sie sich, dass es sich nicht um einen angeordneten Körper handeln kann.