

Übung 2 zur Analysis I

Georg Biedermann
25.4.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $|P(M)| = 2^n$.

Lösung: Sie können die Induktion bei $n = 0$ oder $n = 1$ anfangen lassen. Für $n = 0$ sieht man, dass M die leere Menge ist. Dann gilt:

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\} \quad \text{also} \quad |P(\emptyset)| = 1 = 2^0$$

Für $n = 1$ hat M genau ein Element, sagen wir $\{m\} = M$. Alle Teilmengen von M sind dann $\emptyset$ und $\{m\}$, also

$$|P(\emptyset)| = 2 = 2^1.$$

Es folgt die Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei die Aussage

$$\forall M : |M| = n \implies |P(M)| = 2^n$$

schon bewiesen. Wir müssen jetzt die Aussage für $n + 1$ beweisen. Zu zeigen ist:

$$\forall M : |M| = n + 1 \implies |P(M)| = 2^{n+1}$$

Sei jetzt M eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Wir können $n \geq 0$ voraussetzen, denn der Fall, in dem M gar keine Elemente hat, wurde schon im Induktionsanfang bewiesen. (Tatsächlich könnten wir $n \geq 1$ voraussetzen, denn wir haben uns ja den Fall $n = 1$ auch noch von Hand überlegt.) Insbesondere ist unser M nicht leer und wir können ein Element $m_0 \in M$ auswählen. (Dies geht nicht, wenn M leer ist, deswegen die Vorrede, dass M nicht leer ist.)

Dann hat $M - \{m_0\}$ genau n Elemente und wir wissen laut Induktionsannahme:

$$P(M - \{m_0\}) = 2^n.$$

Die Teilmengen von M zerfallen jetzt in zwei Gruppen, diejenigen die m_0 enthalten und diejenigen, die m_0 nicht enthalten. Von denjenigen, die m_0 nicht enthalten, gibt es genau 2^n viele nach dem, was wir uns gerade überlegt haben. Von den Teilmengen, die m_0 enthalten, können wir m_0 wegnehmen, und dann gibt es wieder 2^n viele. Insgesamt gibt es also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen von M .

Aufgabe 2:[10 Punkte]

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung: für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Lösung: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n .

Für $n = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich wahr. Das ist der Induktionsanfang. (Sie können wieder bei $n = 0$ anfangen, wenn Sie wollen.)

Wir nehmen jetzt an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Bernoulli-Ungleichung gilt. Wir müssen zeigen, dass dann die Aussage auch für $n+1$ richtig ist. Laut Voraussetzung ist $x > -1$, also $1+x > 0$. Dann können wir die Ungleichung für n mit $(1+x > 0)$ multiplizieren. Es folgt

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

Dann gilt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

denn $nx^2 \geq 0$. Damit ist der Induktionsschritt beendet.

Aufgabe 3:[10 Punkte]

Beweisen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
2. $|z| \geq 0$ und $(z = 0 \iff |z| = 0)$
3. $|z| = |\bar{z}|$ und $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
4. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}z$ und $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}z$
5. Das zu $z \neq 0$ inverse Element ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Berechnen Sie dann $\frac{1-i}{1+i}$.

Lösung: Seien $z = a + bi$ und $w = c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Zu (1):

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{(a+bi) + (c+di)} = \overline{(a+b) + (c+d)i} = (a+b) - (c+d)i \\ &= (a-bi) + (c-di) = \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i \\ &= (a-bi)(c-di) = \bar{z} \cdot \bar{w}\end{aligned}$$

Zu (2):

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0, \text{ weil } a^2+b^2 \geq 0$$

$$0 = z = a + bi \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow 0 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Zu (3):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$$

$$z\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + (-b)^2} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Zu (4):

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Zu (5): Für $z \neq 0$ gilt mit (3):

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Es folgt: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Zu guter Letzt gilt:

$$\frac{1-i}{1+i} = (1-i)(1+i)^{-1} = (1-i)\frac{1-i}{2} = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i$$

Aufgabe 4:[10 Punkte]

Sei $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ die Menge der 2×2 -Matrizen mit reellen Koeffizienten. Weiter betrachten wir folgende Teilmenge von Matrizen:

$$C := \left\{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow C, \quad \varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Körperisomorphismus ist. Berechnen Sie $\varphi(i)$, $\varphi(-i)$, $\varphi(1)$ und $\varphi(-1)$.

Lösung: Die Menge C ist unter Addition und Multiplikation von Matrizen abgeschlossen, denn es gilt für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

Wir wissen jetzt, dass die Gleichungen

$$\varphi(a + bi) + \varphi(c + di) = \varphi((a + bi) + (c + di))$$

und

$$\varphi(a + bi)\varphi(c + di) = \varphi((a + bi)(c + di)),$$

die einen Körperhomomorphismus beschreiben, tatsächlich Sinn ergeben, denn Addition und Multiplikation sind auf beiden Seiten wohldefiniert. Wir weisen jetzt nach, dass φ die Eigenschaften eines Körperhomomorphismus tatsächlich hat. Zuerst die Addition:

$$\begin{aligned} \varphi(z) + \varphi(w) &= \varphi(a + bi) + \varphi(c + di) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= \varphi((a + c) + (b + d)i) = \varphi((a + bi) + (c + di)) = \varphi(z + w) \end{aligned}$$

Dann die Multiplikation:

$$\begin{aligned} (z)\varphi(w) &= \varphi(a + bi)\varphi(c + di) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= \varphi((ac - bd) + (ad + bc)i) = \varphi((a + bi)(c + di)) = \varphi(zw) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Die Abbildung ist surjektiv, denn zu jeder Matrix in C gibt es ein Urbild:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \varphi(a + bi)$$

Die Abbildung ist auch injektiv, denn aus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \varphi(a + bi) = \varphi(z) = \varphi(w) = \varphi(c + di) = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

folgt $a = c$ und $b = d$, also $z = a + bi = c + di = w$. Es folgt, dass erstens C ein Körper ist und φ ein Körperisomorphismus.

Die Null des Körpers C ist

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Eins ist

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das zu

$$0 \neq \varphi(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

inverse Element ist

$$\varphi(z)^{-1} = \varphi(z^{-1}) = \varphi\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Probe (nur so zum Spaß):

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ba \\ -ab + ba & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$