Übung 12 zur Analysis I

Georg Biedermann
11.7.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktionen, wobei I ein (un-)eigentliches Intervall ist. Wir kürzen den Operator $\frac{d}{dt}$ durch D ab. Beweisen Sie die folgende Formel:
$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} f)(D^k g).$$
Beweisen Sie außerdem
$$D^k e^{tx} = x^k e^{tx},$$
wobei $x \in \mathbb{R}$. Folgern Sie jetzt für beliebige $t, x, y \in \mathbb{R}$ die Formel
$$(x+y)^n e^{t(x+y)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} e^{tx} y^k e^{ty}.$$
Setzen Sie schließlich $t = 0$. Was ist passiert?

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es existiere ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_0) \geq g(x_0)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Wir definieren die Funktionen Sinus hyperbolicus
$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
und Cosinus hyperbolicus
$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$
Zeigen Sie:
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$
Zeigen Sie, dass beide Funktionen unendlich oft differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen. Folgern Sie, dass sinh streng monoton steigend ist. Die Umkehrfunktion ist die Funktion
$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Area sinus hyprebolici. Zeigen Sie, dass sie unendlich oft differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Geben Sie an, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

1. $f_1(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (Haben Sie diese Funktion schon einmal gesehen?)
2. $f_2(x) = e^{-x} \cos(2x + \pi)$
3. $f_3(x) = \frac{\cos(x)}{x(x+1)}$

Abgabe: 18.7.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08