Übung 12 zur Analysis I

Georg Biedermann

11.7.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktionen, wobei I ein (un-)eigentliches Intervall ist. Wir kürzen den Operator $\frac{d}{dt}$ durch D ab. Beweisen Sie die folgende Formel:

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} f)(D^k g).$$

Beweisen Sie außerdem

$$D^k e^{tx} = x^k e^{tx},$$

wobei $x \in \mathbb{R}$. Leiten Sie jetzt für beliebige $t, x, y \in \mathbb{R}$ die Formel

$$(x+y)^n e^{t(x+y)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} e^{tx} y^k e^{ty}.$$

Setzen Sie schließlich $t = 0$. Was ist passiert?

Lösung: Die Formel

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} f)(D^k g) \tag{0.1}$$

folgt durch einfache Induktion über n aus der Produktformel. Genauso einfach folgt

$$D^k e^{tx} = x^k e^{tx} \tag{0.2}$$

aus der Kettenregel. Wir wenden jetzt $D^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$ auf die Gleichung

$$e^{t(x+y)} = e^{tx} e^{ty} \tag{0.3}$$

an. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n e^{t(x+y)} &\overset{0.2}{=} D^n\left(e^{t(x+y)}\right) \overset{0.3}{=} D^n\left(e^{tx} e^{ty}\right) \\
&\overset{0.1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} e^{tx})(D^k e^{ty}) \\
&\overset{0.3}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} e^{tx} y^k e^{ty}
\end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Gleichung $t = 0$ setzen, so erhalten wir die Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dies ist ein alternativer Beweis der Binomialformel.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es existiere ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_0) \geq g(x_0)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt.

Lösung: Sei $x \in I, x \geq x_0$ beliebig. Definiere die Hilfsfunktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Dann gilt nach Voraussetzung:

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0\ ,\ h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0.$$

Insbesondere ist $m = 0$ eine untere Schranke für h' auf I. Nach dem Schrankensatz angewendet auf die Funktion $h = f - g$ folgt:

$$0 = m(x - x_0) \leq h(x) - h(x_0) = f(x) - g(x) - \big(f(x_0) - g(x_0)\big).$$

Daraus folgt:

$$0 \leq h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \leq f(x) - g(x)$$

Also gilt für alle $x \in I, x \geq x_0$:

$$f(x) \geq g(x).$$

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Wir definieren die Funktionen Sinus hyperbolicus

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und Cosinus hyperbolicus

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Zeigen Sie:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

Zeigen Sie, dass beide Funktionen unendlich oft differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen. Folgern Sie, dass sinh streng monoton steigend ist. Die Umkehrfunktion ist die Funktion

$$\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Area sinus hyprebolici. Zeigen Sie, dass sie unendlich oft differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösung: Aus den Definitionen folgt:

$$\begin{aligned}
\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}\right) \\
&= e^x e^{-x} = 1.
\end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion ist überall unendlich oft differenzierbar. Deswegen sind auch der Sinus hyperbolicus und der Cosinus hyperbolicus auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sinh'(x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) \\
\cosh'(x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)
\end{aligned}$$

Weil für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Zahlen e^x und e^{-x} positiv sind, folgt, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Insbesondere besitzt er eine Umkehrfunktion, den sog. Area sinus heperbolici. Dies Funktion ist als Umkehrfunktion einer unendlich oft differenzierbaren Funktione selbst unendlich oft differenzierbar. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arsinh}(x)^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Geben Sie an, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

1. $f_1(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (Haben Sie diese Funktion schon einmal gesehen?)
2. $f_2(x) = e^{-x}\cos(2x + \pi)$
3. $f_3(x) = \frac{\cos(x)}{x(x+1)}$

Lösung: Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{1+x^2} > |x|$. Deshalb ist der Term $x + \sqrt{1+x^2}$ immer positiv und f_1 ist überall definiert. Der Logarithmus ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar. Das einzige Problem für die Differenzierbarkeit kann vom der Wurzelfunktion kommen, die in 0 nicht differenzierbar ist. Es ist aber $\sqrt{1+x^2} \geq 1$ und das Problem wird vermieden. Deshalb ist f_1 auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt:

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Die Funktion f_2 ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

$$f_2'(x) = (-e^{-x}) \cos(2x+\pi) + e^{-x}(-2)\sin(2x+\pi) = -e^{-x}\big(1 + 2\sin(2x+\pi)\big).$$

Der Nenner der Funktion f_3 hat bei $x = 0$ und $x = 1$ Nullstellen. Deshalb ist die Funktion dort nicht definiert. Außerhalb dieser Nullstellen ist f_3 differenzierbar und es gilt:

$$f_3'(x) = \frac{(-\sin x)x(x+1) - \cos(x)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

Abgabe: 18.7.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08