Übung 11 zur Analysis I

Georg Biedermann

4.7.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

1. Es gilt:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

2. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,\ e^{2\pi i} = 1$

3. Es gilt:

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Für $k = 0, 1, 2$ betrachte die Funktion

$$f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ für } \ x \neq 0 \\ 0 & , \text{ für } \ x = 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie:

1. f_0 ist in 0 nicht stetig.

2. f_1 ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

3. f_2 ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ die Funktion

$$\sqrt[n]{-} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

für alle $a > 0$ in a differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung in a. Zeigen Sie dann, dass $\sqrt[n]{-}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Die Funktion sin ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und differenzierbar mit Bild $[-1, 1]$. Also existiert die Umkehrfunktion Arcus Sinus

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass arcsin differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. (Tipp: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$)

Abgabe: 11.7.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung von $x \mapsto \frac{1}{x}$. Wo sind diese Funktionen definiert?

Aufgabe: Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar?

$$\sin(x^2), \sin(x)^2, x^2\cos(2x), \frac{4x^3 - x}{\sin(x^2)}$$

Berechnen Sie ihre Ableitung.

Aufgabe: Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|^3.$$

Berechnen Sie f' und f'' für alle $x \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass $f'''(0)$ nicht existiert.

Aufgabe: Definiere den Tangens $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ durch

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos(x)}.$$

Zeigen Sie, dass tan differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.