Übung 11 zur Analysis I

Georg Biedermann
4.7.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

1. Es gilt:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

2. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,\ e^{2\pi i} = 1$

3. Es gilt:

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

Lösung: Um die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus zu beweisen, benutzen wir zuerst die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} &= \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)\Big(\cos(y) + i\sin(y)\Big) \\ &= \cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i\big(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\big)\end{aligned}$$

Jetzt vergleichen wir Real- und Imaginärteile und die behaupteten Gleichungen folgen.

Wir haben die folgenden Gleichungen nicht bewiesen, genauso wie wir die Zahl π noch gar nicht definiert haben. Aber ich hoffe, Sie kennen folgende Gleichung:

	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	1	0	-1	0
cos	0	-1	0	1

Mit der Gleichung $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgen die speziellen Werte von e^{ix}.

Für den letzten Teil benutzen wir die Additionstheoreme und die speziellen Werte.

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x)\\
\cos(x+\pi) &= \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)\\
\sin(x+2\pi) &= \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x)\\
\sin(x+\pi) &= \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Für $k = 0, 1, 2$ betrachte die Funktion

$$f_k\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ für } \ x \neq 0 \\ 0 & , \text{ für } \ x = 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie:

1. f_0 ist in 0 nicht stetig.
2. f_1 ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar.
3. f_2 ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Lösung: 1. Wir "wissen" (werden bald in der Vorlesung zeigen), dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\sin(2\pi k) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$ gelten. (Dies folgt auch aus Aufgabe 1.) Setze jetzt

$$x_k = \frac{1}{2\pi k} \quad \text{und} \quad y_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)^{-1}.$$

Dann gilt einerseits

$$\lim_{k\to\infty} f_0(x_k) = \lim_{k\to\infty} \sin(2\pi k) = 0$$

und andererseits

$$\lim_{k\to\infty} f_0(y_k) = \lim_{k\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1.$$

Also existiert der Limes $\lim_{x\to 0+} f_0(x)$ nicht und f_0 ist bei 0 nict stetig.
2. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \leq 1$. (Dies folgt aus $|e^{ix}| = 1$.) Insbesondere gilt:

$$0 \leq \lim_{x\to 0} |f_1(x)| = \lim_{x\to 0} |x \sin(\frac{1}{x})| \leq \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Insgesamt gilt also $f_1(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f_1(x)$ und f_1 ist in 0 stetig. Es gilt aber auch für alle $x \neq 0$:

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{x\sin(x)}{x} = \sin(x)$$

Und wir haben in 1. schon gezeigt, dass der Grenzwert dieser Funktion für $x \to 0$ nicht existiert. Also ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.

3. Wir betrachten für $x \neq 0$ den Differenzenquotienten

$$\frac{f_2(x) - f_2(x)}{x} = \frac{x^2 \sin(x)}{x} = x \sin(x).$$

In Teil 2 haben wir den folgenden Grenzwert schon ausgerechnet (und insbesondere gezeigt, dass er existiert):

$$f_2'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_2(x) - f_2(x)}{x} = \lim_{x \to 0} (x \sin(x)) = 0.$$

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ die Funktion

$$\sqrt[n]{-} \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

für alle $a > 0$ in a differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung in a. Zeigen Sie dann, dass $\sqrt[n]{-}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

Lösung: Sei $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Wir zeigen zunächst, dass f in 0 nicht differenzierbar ist. Es gilt für alle $0 < y < 1$

$$\frac{y}{y^n} = \frac{1}{y^{n-1}} \to \infty \quad \text{für} \quad y \to 0.$$

Substituiere jetzt $y = \sqrt[n]{x}$ mit $0 < x < 1$. Dann folgt wieder $0 < y < 1$ und für $x \to 0$ geht auch $y = \sqrt[n]{x}$ gegen 0, denn die n-te Wurzelfunktion ist stetig. Insgesamt folgt aus dem obigen Grenzprozess also:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{x} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

Also exisitert die Ableitung von $f = \sqrt[n]{-}$ für 0 nicht. (Die Ableitung der n-ten Wurzel ist in der Nähe von 0 nicht nach oben beschränkt. Anschaulich sieht man, wenn man den Graphen betrachtet, dass die Tangente bei 0 parallel zur y-Achse ist, also Steigung $+\infty$ hat.)

Jetzt zeigen wir, dass f für $a > 0$ differenzierbar ist und berechnen die Ableitung.

Version 1: Mit der Binomialformel. Für alle $x, a > 0$ gilt:

$$x - a = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} a^{\frac{n-1-k}{n}}$$

Es folgt:

$$\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}x^{\frac{k}{n}}a^{\frac{n-1-k}{n}}\right)^{-1}$$

Teilen durch die Summe rechts ist in Ordnung, denn wir betrachten nur x in einer kleinen Umgebung von $a>0$, also ist die gesamte Summe >0. Jetzt bilden wir den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\sum_{k=0}^{n-1}x^{\frac{k}{n}}a^{\frac{n-1-k}{n}}\right)^{-1}=\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\lim_{x\to a}x^{\frac{k}{n}})a^{\frac{n-1-k}{n}}\right)^{-1}\\&=\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^{\frac{n-1}{n}}\right)^{-1}=\left(na^{\frac{n-1}{n}}\right)^{-1}=\frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{n}\end{aligned}$$

Version 2: Via dem Satz über die Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion von f ist $g(x)=x^n$. Wir wissen schon:

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}.$$

Der Satz ist anwendbar für alle $a\geq 0$, so dass $0\neq g(a)=a^n$, also für alle $a>0$. Dort gilt:

$$f'(a)=\frac{1}{g'(f(a))}=\left(n(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right)^{-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{n}{n-1}}=\frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Für $a=0$ siehe Version 1.

Version 3: Unter Benutuzung der Gleichung $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$. Es gilt mit der Kettenregel:

$$f'(a)=\frac{d}{da}e^{\frac{1}{n}\ln(a)}=\frac{1}{an}e^{\frac{1}{n}\ln(a)}=\frac{1}{an}a^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Auch hier müssen wir $a>0$ voraussetzen, denn sonst ist $\ln(a)$ nicht definiert. Für $a=0$ siehe Version 1.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Die Funktion sin ist auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und differenzierbar mit Bild $[-1,1]$. Also existiert die Umkehrfunktion Arcus Sinus

$$\arcsin\colon\ [-1,1]\to\mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass arcsin differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. (Tipp: $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$)

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Sinus auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Bild $[-1, 1]$. Also ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion der Arcus Sinus auf seinem Definitionsgebiet $[-1, 1]$ differenzierbar. Es gilt weiter:

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist dann:

$$\arcsin'(x) = \big(\sin'(\arcsin(x))\big)^{-1} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Um weiterzurechnen, benutzen wir

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}.$$

Also:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$