Übung 10 zur Analysis I

Georg Biedermann
27.6.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Sei $f\colon [a, b] \to [a, b[$ stetig. Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in $x_0 \in [a, b]$ ein *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum* hat, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle

$$x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x) \leq f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Zeigen Sie, dass, wenn f stetig ist und in $]a, b[$ weder lokalen Maxima, noch lokalen Minima besitzt, dann f monoton fallend oder monoton steigend ist.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ definieren wir Funktionen $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & , \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - n(x - \frac{1}{n}) & , \text{ für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & , \text{ für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graph der Funktionen f_2 und f_3. Zeigen Sie:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n bei $\frac{1}{n}$ und $\frac{2}{n}$ wohldefiniert.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n stetig.
3. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise. Bestimmen Sie die punktweise Grenzfunktion.
4. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig.

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Beweisen Sie, dass für $U \subset \mathbb{C}$ die Menge

$$L^\infty(U) = \{f\colon U \to \mathbb{C} \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$$

ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Beweisen Sie dann, dass die Supremumsnorm auf diesem Raum die Eigenschaften einer Norm erfüllt, d.h. für alle $f, g \in L^\infty(U)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\|f\|_\infty \geq 0$
2. $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$
3. $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
4. $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Abgabe: 4.7.2018 bis 10:00 Uhr in D.13.08

Aufgaben für die Übungen

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Folge

$$f_n\colon \ \ [0,1[\to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$$

punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe: Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat: $\exists\, x \in [a,b] : f(x) = x$.

Aufgabe: Was passiert, wenn man in der vorigen Aussage $[a,b]$ durch $]a,b[$ oder $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ ersetzt?

Aufgabe: Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$. Zeigen Sie: $\exists\, x \in [a,b] : f(x) = g(x)$.

Aufgabe: Betrachte die Funktion $S(x)\colon\ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$S(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Kann man diese Funktion stetig nach 0 fortsetzen? D.h. gibt es eine Funktion $T\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, die erstens stetig ist und zweitens für alle $x > 0$ die Gleichung $S(X) = T(X)$ erfüllt? (Benutzen Sie Ihr Vorwissen über den Sinus.)