Übung 1 zur Analysis I

Georg Biedermann
18.4.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $A, B \subset C$, und Z Mengen und $f\colon C \to Z$ eine Abbildung. Dann gilt:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Geben Sie ein Gegenbeispiel für Gleichheit in Aussage (2).

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) &= x^2 \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}\,,\ g(x) &= |x| \\ h\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\,,\ h(x) &= \sqrt{x} \\ k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ k(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Hierbei gelte: $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Seien a und b aus $\mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Wir definieren das harmonische, geometrische und arithmetische Mittel aus a und b wie folgt:

$$H(a,b) := \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1},\ G(a,b) := \sqrt{ab},\ A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

Zeigen Sie:
1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : 2ab \leq a^2 + b^2$
(Tipp: Formen Sie die Ungleichung um in eine von der Form $0 \leq \ldots$)
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : G(a,b) \leq A(a,b)$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : H(a,b) \leq G(a,b)$

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Zeigen sie die folgenden Aussagen:

(1) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

(2) Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.

(3) Das Produkt zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.

(4) Die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Abgabe: 25.4.2018 bis 10:00 Uhr

Aufgaben für die Übungen

Vollständige Induktion ist ein Verfahren, um eine über $\mathbb{N}$ indizierte Menge von Aussagen $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ zu beweisen.

Dazu braucht man zunächst einen *Induktionsanfang*, d.h. man beweist die erste Aussage $A(1)$ direkt. (Beachten Sie, dass der Induktionsanfang auch bei 0 oder einer anderen natürlichen Zahl starten kann. Dies hängt davon ab, welche Aussagen Sie beweisen wollen.)

Als nächstes setzt man für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ voraus (d.h. man nimmt sie als schon bewiesen an). Dies ist die *Induktionsannahme*.

Dann folgt der *Induktionsschluss* oder *Induktionsschritt*: Sie beweisen mit Hilfe von $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$.

Wie bei Dominosteinen folgt dann, dass alle Aussagen $A(n)$ für beliebiges n wahr sind.

Aufgabe: Zeigen Sie per vollständiger Induktion:

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Sei M eine Menge mit m Elementen und sei N eine Menge mit n Elementen. Das Produkt $M \times N$ enthält dann mn Elemente.

Aufgabe: Finden Sie den Fehler!

Aussage: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Das eine Pferd hat nur eine Farbe. Sei die Aussage für jede Menge mit n Elementen bewiesen: in einer Menge mit n Pferden gibt es nur eine Farbe. Wir betrachten jetzt eine Menge mit $n+1$ Pferden und numerieren dies $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Dann haben aber nach Induktionsannahme alle Pferde in $\{1, \ldots, n\}$ und in $\{2, \ldots, n+1\}$ dieselbe Farbe. Weil die zwei Mengen aber überschneiden, müssen alle Pferde dieselbe Farbe haben.