Übung 1 zur Analysis I

Georg Biedermann
18.4.2018

Aufgabe 1:[10 Punkte]
Seien $A, B \subset C$, und Z Mengen und $f\colon C \to Z$ eine Abbildung. Dann gilt:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Geben Sie ein Gegenbeispiel für Gleichheit in Aussage (2).

Lösungssketch: (1) Wir können folgende Äquivalenzen betrachen:

$$\begin{aligned} x \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow\ \exists\, y \in A \cup B : f(y) = x \\ &\Leftrightarrow\ (\exists\, y \in A : f(y) = x) \text{ oder } (\exists\, y \in B : f(y) = x) \\ &\Leftrightarrow\ (x \in f(A)) \text{ oder } (x \in F(B)) \\ &\Leftrightarrow\ x \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

Damit enthalten beide Mengen dieselben Elemente und sind daher gleich.
(2) Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in f(A \cap B) &\Rightarrow\ \exists\, y \in A \cap B : f(y) = x \\ &\overset{(*)}{\Rightarrow}\ (\exists\, y \in A : f(y) = x) \text{ und } (\exists\, y' \in B : f(y') = x) \\ &\Rightarrow\ (x \in f(A)) \text{ und } (x \in F(B)) \\ &\Rightarrow\ x \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Man beachte, dass in Zeile 2 die Elemente y und y' nicht gleich zein müssen, während in der Zeile darüber deren Existenz und deren Gleicheit behauptet wird. Deswegen ist die Implikation $(*)$ keine Äquivalenz.

Und tatsächlich gilt die Gleichheit in Aussage (2) nicht ohne weitere Bedingungen. Hier ist ein Bespiel, in dem Gleichheit nicht gilt: sei $A = \{1\}, B = \{2\}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ die konstante Abbildung auf 0. Dann gilt:

$$A \cap B = \{1\} \cap \{2\} = \varnothing \ \Rightarrow\ f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing,$$

aber

$$f(A) \cap f(B) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \neq \varnothing.$$

Aufgabe 2:[10 Punkte]
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

$$
\begin{aligned}
f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) &= x^2 \\
g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}\,,\ g(x) &= |x| \\
h\colon\ \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\,,\ h(x) &= \sqrt{x} \\
k\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ k(x) &= x^3
\end{aligned}
$$

Hierbei gelte: $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Lösungssketch: Zu f:

- Die Abbildung h ist nicht surjektiv, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = x^2 \geq 0$. Damit hat keine negative Zahl ein Urbild, z.B. $-1 \notin f(\mathbb{R})$.
- Die Abbildung f ist auch nicht injektiv, denn es gilt z.B. $f(-1) = 1 = f(1)$.

Zu g:

- Bevor wir die Aufgabe lösen: *mir ist ein Tippfehler unterlaufen*. So wie auf dem Aufgabenblatt ist g nicht wohldefiniert, denn $g(0) = 0$ liegt nicht im Bildbereich $\mathbb{R}_{>0}$. Gemeint war als Bildbereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- Die Abbildung $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist surjektiv, denn jedes nicht-negative reele Zahl a besitzt ein Urbild, z.B. $g(a) = |a| = a$ für $a \geq 0$. (Es ist klar, dass die Abbildung $\widetilde{g}\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = |x|$ natürlich nicht surjektiv ist.)
- Die Abbildung $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist nicht injektiv, denn es gilt z.B. $g(-1) = 1 = g(1)$.

Zu h:

- Die Abbildung h ist nicht surjektiv, denn für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $h(x) = \sqrt{x} > 0$. Damit hat keine negative Zahl ein Urbild, z.B. $-1 \notin f(\mathbb{R})$.
- Die Abbildung h ist injektiv. Dies kann man z.B. daran sehen, dass h streng monoton wachsend ist: $0 < x < y \ \Rightarrow\ \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Zu k: Die Abbildung k ist bijektiv.

- Die Abbildung k ist surjektiv. Wir können aus jeder Zahl die dritte Wurzel ziehen (obwohl wir dies erst später in der Vorlesung beweisen werden).
- Die Abbildung k ist injektiv, denn auch k ist streng monoton wachsend: $0 < x < y \ \Rightarrow\ x^3 < y^3$.

Aufgabe 3:[10 Punkte]
Seien a und b aus $\mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Wir definieren das harmonische, geometrische und arithmetische Mittel aus a und b wie folgt:

$$H(a,b) := \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}, \; G(a,b) := \sqrt{ab}, \; A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

Zeigen Sie:
1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : 2ab \leq a^2 + b^2$
(Tipp: Formen Sie die Ungleichung um in eine von der Form $0 \leq \ldots$)
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : G(a,b) \leq A(a,b)$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : H(a,b) \leq G(a,b)$

Lösungssketch: (1) Wir zeigen zunächst 1.: Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0.$$

Daraus folgt:

$$2ab \leq a^2 + b^2. \tag{0.1}$$

(2) Mit Hilfe dieser Ungleichung folgt direkt 2.:

$$4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

Das Ziehen einer Wurzel ist i.a. keine Äquivalenzumformung; die quadrierte Gleichung hat u.U. mehr Lösungen als die nicht-quadrierte Gleichung. Wenn wir aber wissen, dass die gesuchten Lösungen schon positiv sind, dürfen wir die Wurzel ziehen. Für eventuelle negative Lösungen würde sich auch die Ungleichung umdrehen. Das ist hier nicht der Fall. Nach Voraussetung $(a, b > 0)$ sind $G(a,b)$ und $A(a,b)$ sind positiv, also:

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

Es folgt

$$G(a,b) = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = A(a,b).$$

(3) Wir geben zwei verschiedene Lösungen für Teil (3).
Für $c, d > 0$ gilt mit Hilfe von Ungleichung 0.1 (setze $a = \sqrt{c}$ und $b = \sqrt{d}$):

$$0 \leq \sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2}.$$

Wir kehren zu a und b zurück und formen etwas um:

$$0 \leq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1. \tag{0.2}$$

Jetzt gilt

$$\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab},$$

wobei man den letzten Schritt einfach aus 0.2 durch Multiplikation mit $\sqrt{ab} > 0$ erhält.

Eine andere Lösung bekommt man, wenn man $x = \frac{1}{a}$ und $y = \frac{1}{b}$ substituiert und die schon bewiesene Ungleichung (1) für x und y anwendet. Dann gilt:

$$\sqrt{xy} = G(x,y) \leq A(x,y) = \frac{x+y}{2}$$

Aus $a, b > 0$ folgt $x, y > 0$. Wir können also das multiplikative Inverse nehmen, wobei sich die Ungleichung umdreht:

$$(\sqrt{xy})^{-1} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1}.$$

Dann machen wir unsere Substitution rückgängig:

$$G(ab) = \sqrt{ab} = \left(\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\right)^{-1} = (\sqrt{xy})^{-1} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} = H(a,b).$$

Aufgabe 4:[10 Punkte]
Zeigen sie die folgenden Aussagen:

(1) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

(2) Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.

(3) Das Produkt zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.

(4) Die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Lösung: (1) Wenn $A = \varnothing$, dann ist A nach Definition abzählbar. Sei also $A \neq \varnothing$. Dann existiert $a_0 \in A$. Wir konstruieren eine Abbildung $\psi\colon B \to A$ wie folgt:

$$\psi(b) = \begin{cases} b & , \text{ wenn } b \in A \\ a_0 & , \text{ wenn } b \notin A \end{cases}$$

Dieses ψ ist surjektiv, denn jedes $a \in A$ hat ein Urbild: a selbst. Weill B abzählbar ist gibt es eine Surjektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to B$. Wir verknüpfen jetzt einfach unsere Surjektionen: $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{N} \to A$ ist surjektiv, weil die Hintereinanderausführung von surjektiven Abbildung wieder surjektiv ist. Damit ist A abzählbar.

(2) Für $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ ist

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$$

eine Abzählung von $A \cup B$.

(3) Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ abzählbar. Wir schreiben die Elemente von $A \times B$, also Paare der Form (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ in eine Tabelle:

	a_1	a_2	a_3	$\ldots$
b_1	(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	(a_3, b_1)	$\ldots$
b_2	(a_1, b_2)	(a_2, b_2)	(a_3, b_2)	$\ldots$
b_3	(a_1, b_3)	(a_2, b_3)	(a_3, b_3)	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Jedes Element aus $A \times B$ taucht einmal in dieser Tabelle auf. Wir können jetzt (genauso wie im Beweis, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist) der Reihe nach jede Diagonal von rechts oben nach links unten abgehen. Wir erhalten eine Liste, in der jedes Paar (a, b) einmal auftaucht. Dies ist dasselbe wie eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $A \times B$.

(4) Die Menge $\mathbb{N}$ ist natürlich abzählbar. Um der Definition der Abzählbarkeit zu genügen, können wir einfach die Identität $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n$ nehmen. Dann ist aber nach (2) auch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$$

abzählbar. Dann ist nach (3) das Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar.

Abgabe: 25.4.2018 bis 10:00 Uhr