Name: Thomas Mustermann
Matrikelnr.: 0000000

16

Analysis I: Klausur

Bergische Universität Wuppertal
Sommersemester 2018

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn von der Aufsichtsperson angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Vorlesungsmitschriften, Telephonjoker etc.) zugelassen. Bitte legen Sie alle Taschen, die Sie mitgebracht haben, vor Beginn der Klausur vorne oder an den Seiten des Hörsaals ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Lediglich traditionelle Armbanduhren oder Wecker sind von dieser Regelung ausgenommen.
- Bitte überprüfen Sie die Angaben links oben auf dieser Seite (Name und Matrikelnummer) und korrigieren Sie gegebenenfalls Druckfehler. Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit ($n+1$ Aufgaben).
- Bitte legen Sie Ihren Lichtbildausweis und Ihren Studentenausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann. Am Ende der Klausur finden Sie zwei weitere Blätter, die Sie als “Schmierzettel” verwenden können. Ihre Lösungen inklusive aller Nebenrechnungen notieren Sie bitte ausschließlich im Klausurbogen an der vorgesehenen Stelle. Auf den weiteren Blättern niedergeschriebene Lösungen werden nur gewertet, wenn sie unmissverständlich markiert sind und an der entsprechenden Aufgabe ein Vermerk angebracht wird.
- Um Ihr Klausurergebnis zu erfahren, benötigen Sie die folgende persönliche Identifikationsnummer (PIN): $\boxed{971}$ – Bitte merken Sie sich diese Nummer.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	...	...	n+1	$\sum$
Punkte	/6	/5	?	?	?	/11+?

Aufgabe 1: Binomialkoeffizienten (12 Punkte)
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Definieren Sie für $k \leq n$ den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. (2 Punkte)

(b) Beweisen Sie die Formel (5 Punkte)

$$\binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n+1-k).$$

(c) Beweisen Sie die Formel (5 Punkte)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Dabei setzen wir immer $\binom{n}{k} = 0$, falls in einer Formel $k < 0$ oder $k > n$ auftauchen sollte.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung: Teil 1, Definition: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Teil 2: Es gilt:

$$\binom{n}{k} \cdot k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k = \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \cdot (n+1-k)$$

$$= \binom{n}{k-1} \cdot (n+1-k).$$

Teil 3: Es gilt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + k \cdot n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{k}$$

Aufgabe 2: Cauchy-Folgen sind beschränkt (12 Punkte)
In der folgenden Aufgabe dürfen Sie in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten.

1. Definieren Sie den Begriff der Cauchy-Folge. (2 Punkte)
2. Definieren Sie den Begriff der beschränkten Folge. (2 Punkte)
3. Beweisen Sie, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist. (8 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung: Definition $(x_{n\in\mathbb{N}})$ Cauchy-Folge: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \leq \varepsilon.$$

Definition beschränkt: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt;

$$|x_n| \leq C \quad \text{oder} \quad < C$$

Oder äquivalent dazu: $\exists\ C, D \in \mathbb{R}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$$C \leq x_n \leq D.$$

Es gibt hier viele Variationen abhängig davon, ob man in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeitet, mit $<$ oder $\leq$ oder mit verschiedener oberer und unterer Schranke.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wir müssen ein $C \in \mathbb{R}$ finden, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|x_n| < C$.
Wir wählen $\varepsilon = 1$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt: $|x_m - x_n| < 1$. Insbesondere gilt dies für $m = N$, d.h. für alle $n \geq N$ gilt:

$$|x_N - x_n| < 1.$$

Also sind alle bis vielleicht auf die ersten $N-1$ Folgeglieder im Intervall $]x_N - 1, x_n + 1[$ enthalten. Beachte:

$$x_N - 1, x_N + 1 \leq |x_N| + 1.$$

Setze jetzt $C = \max\{|x_N| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|x_n| < C$.

Aufgabe 3: Potenzreihen und Konvergenzradien (12 Punkte)
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{(5n)!}$ (4 Punkte)
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(2n)}$ (4 Punkte)
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{2n}^{-1} x^n$ (3 Punkte) (???)
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$ (4 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{(5n)!}$
Betrachte:

$$\frac{(n+1)^5}{(5n+5)!} \cdot \frac{(5n)!}{n^5} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \frac{1}{(5n+5)\cdot \ldots \cdot (5n+1)} = \frac{1}{n^5}\frac{n+1}{5n+5} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{5n+1} < \frac{1}{n^5},$$

denn $n+1 < 5n+1 < \ldots < 5n+5$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(5n+5)!} \cdot \frac{(5n)!}{n^5} = 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius dann $\frac{1}{0} = +\infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(2n)}$
Wir betrachten den Term

$$\frac{\ln(2n)}{\ln(2(n+1))}.$$

und versuchen, den Grenzwert für $n \to \infty$ zu berechnen. Dazu benutzen wir die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n))}{\ln(2(n+1))} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(2y)}{\ln(2(y+1))} = \lim_{y\to\infty} \frac{2/y}{2/(y+1)} = \lim_{y\to\infty} \frac{y+1}{y} = 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium folgt, dass der Konvergenzradius genau 1 ist.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{2n}^{-1} x^n$
Betrachte

$$\binom{3n+3}{2n+2}^{-1} \cdot \binom{3n}{2n} = \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to \frac{4}{27}$$

für $n \to \infty$. Also ist nach dem Quotientenkriterium der Konvergenzradius $\frac{27}{4}$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$
Es gilt:

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \lim_n \sqrt[n]{n^3} = \frac{1}{2}\left(\lim_n \sqrt[n]{n}\right)^3 = \frac{1}{2},$$

denn $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. Also ist der Konvergenzradius nach dem Wurzelkriterium 2.

Aufgabe 4: Eulersche Zahl und Exponentialfunktion (12 Punkte)

(a) Definieren Sie die Eulersche Zahl e, so wie es in der Vorlesung gemacht wurde. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie $2,5 < e < 3$, indem Sie nach oben gegen eine geeignete geometrische Reihe abschätzen. (5 Punkte)

(c) Definieren Sie die Exponentialfunktion, so wie es in der Vorlesung gemacht wurde. (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die entsprechende Reihe in der Definition der Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. (3 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung: Definition e: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
Es gilt:

$$e > \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5.$$

Für $n \geq 2$ gilt $n! \geq 2^{n-1}$ und damit

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Also haben wir eine Abschätzung gegen eine geometrische Reihe:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3$$

Definition der Exponentialfunktion: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Konvergenzradius nach Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Also ist der Konvergenzradius $+\infty$.

Aufgabe 5: (12 Punkte)
Entscheiden, wo die folgenden Funktionen (nicht) differenzierbar sind, und begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie dann ihre Ableitung. Beschränken Sie sich immer auf Definitions- und Wertemengen in $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sqrt[4]{x}$ (4 Punkte)
2. $g(x) = \frac{x\cos(x^2)}{x-1}$ (4 Punkte)
3. $h(x) = e^{x^3}(1 - \sqrt[3]{x^2+1})$ (4 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung:

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

Die Funktion ist nicht in 0 differenzierbar. Dazu betrachten wir zuerst den Grenzwert

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^3} = +\infty.$$

Wenn man $y = \sqrt[4]{x}$ setzt, dann gilt

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{x} \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

Die Funktion f ist für alle $a > 0$ in a differenzierbar: Version 1: Mit der Binomialformel. Für alle $x, a > 0$ gilt:

$$x - a = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} a^{\frac{n-1-k}{n}}$$

Es folgt:

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} a^{\frac{n-1-k}{n}} \right)^{-1}$$

Teilen durch die Summe rechts ist in Ordnung, denn wir betrachten nur x in einer kleinen Umgebung von $a > 0$, also ist die gesamte Summe > 0. Jetzt bilden wir den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \lim_{x\to a} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} a^{\frac{n-1-k}{n}} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\lim_{x\to a} x^{\frac{k}{n}}) a^{\frac{n-1-k}{n}} \right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{n-1}{n}} \right)^{-1} = \left(n a^{\frac{n-1}{n}} \right)^{-1} = \frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{n} \end{aligned}$$

Version 2: Via dem Satz über die Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion von f ist $g(x) = x^n$. Wir wissen schon:

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Der Satz ist anwendbar für alle $a \geq 0$, so dass $0 \neq g(a) = a^n$, also für alle $a > 0$. Dort gilt:

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))} = \left(n (\sqrt[n]{a})^{n-1} \right)^{-1} = \frac{1}{n} a^{\frac{n}{n-1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Version 3: Unter Benutuzung der Gleichung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$. Es gilt mit der Kettenregel:

$$f'(a) = \frac{d}{da} e^{\frac{1}{n}\ln(a)} = \frac{1}{an} e^{\frac{1}{n}\ln(a)} = \frac{1}{an} a^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Auch hier müssen wir $a > 0$ voraussetzen, denn sonst ist $\ln(a)$ nicht definiert.

$g(x) = \frac{x\cos(x^2)}{x-1}$
Der Nullstelle des Nenners ist $x = 1$. Dort ist die Funktion nicht definiert und insbesondere nicht differenzierbar. Für $x \neq 1$ ist g als Quotient von differenzierbaren Funktionen selber differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{(x-1)^2}\big((x-1)(\cos(x^2) + x(2x)(-\sin(x^2)) - x\cos(x^2)\big) \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\Big((x-1)\big(\cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)\big) - x\cos(x^2)\Big) \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\big(-\cos(x^2) - 2x^2(x-1)\sin(x^2)\big) \end{aligned}$$

$h(x) = e^{x^3}(1 - \sqrt[3]{x^2+1})$
Die Wurzelfunktion ist in 0 nicht differenzierbar, aber es gilt $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deswegen gibt es keine Probleme. Die Funktion ist auf gan $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 e^{x^3}(1 - \sqrt[3]{x^2+1}) + e^{x^3}\big(-2x \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\big) \\ &= e^{x^3} x \left(3x(1 - \sqrt[3]{x^2+1}) - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit (12 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ Funktionen.

1. Definieren Sie, was es heißt, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. (2 Punkte)
2. Definieren Sie die Supremumsnorm für Funktionen von U nach $\mathbb{C}$. (2 Punkte)
3. Definieren Sie, was es heißt, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. (2 Punkte)
4. Beweisen Sie, dass f stetig ist, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen f_n stetig sind. (6 Punkte)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung:

Definition pktw Konvergenz: Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $z \in U$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Definition Supnorm: Sei $g : U \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\|g\|_\infty = \sup_{z \in U} |g(z)|.$$

Definition glm Konvergenz: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und alle $z \in U$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ (\Longleftrightarrow \ \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon).$$

Beweis: Sei $z_0 \in U$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass f in z_0 stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und alle $z \in U$ gilt:

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Weil f_N stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in U \cap U_\delta(z_0)$ gilt:

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Insgesamt gilt also für alle $z \in U \cap U_\delta(z_0)$:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig bei z_0. Weil z_0 beliebig war, ist f stetig.

Aufgabe 7: Kurvendiskussion, lokale und globale Extrema (12 Punkte)
Finden Sie sämtliche lokale und globale Extrema der folgenden Funktion:

$$f : [\,-3/4\,,\,1\,] \to \mathbb{R}\ ,\ \ f(x) = x^3 + x^2.$$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Lösung: Wir berechnen zuerst die Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$$

und

$$f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1). \quad x = -\frac{1}{3}$$

Dann gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x = -2/3$. Dies sind unsere Kandidaten für lokale Extrema im Inneren. (Verschwindene Ableitung ist eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum im Inneren des Definitionsintervalls.) Es gilt:

$$f''(-\frac{2}{3}) = -6 \cdot \frac{2}{3} + 2 = -2 < 0$$

und

$$f''(0) = 2 > 0.$$

Damit haben wir eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema erfüllt.: bei $x = -\frac{2}{3}$ existiert ein lokales Maximum und bei $x = 0$ existiert ein lokales Minimum.

Um die Frage zu entscheiden, wo die globalen Extrema liegen, muss man mit den Rändern des Intervalls vergleichen. Es gilt:

$$f(-2/3) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{-8 + 12}{27} = \frac{4}{27}$$

und

$$f(-3/4) = -\frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{-27 + 36}{64} = \frac{9}{64}$$

und

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 2.$$

Damit liegt das globale Maximum bei $x = 1$ und das globale Minimum bei $x = 0$.