Name:
Matrikelnr.:

Analysis I: Nachklausur

Bergische Universität Wuppertal
Sommersemester 2018

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn von der Aufsichtsperson angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Vorlesungsmitschriften, Telephonjoker etc.) zugelassen. Bitte legen Sie alle Taschen, die Sie mitgebracht haben, vor Beginn der Klausur vorne oder an den Seiten des Hörsaals ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Lediglich traditionelle Armbanduhren oder Wecker sind von dieser Regelung ausgenommen.
- Bitte überprüfen Sie die Angaben links oben auf dieser Seite (Name und Matrikelnummer) und korrigieren Sie gegebenenfalls Druckfehler. Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (7 Aufgaben).
- Bitte legen Sie Ihren Lichtbildausweis und Ihren Studentenausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann. Am Ende der Klausur finden Sie zwei weitere Blätter, die Sie als "Schmierzettel" verwenden können. Ihre Lösungen inklusive aller Nebenrechnungen notieren Sie bitte ausschließlich im Klausurbogen an der vorgesehenen Stelle. Auf den weiteren Blättern niedergeschriebene Lösungen werden nur gewertet, wenn sie unmissverständlich markiert sind und an der entsprechenden Aufgabe ein Vermerk angebracht wird.
- Um Ihr Klausurergebnis zu erfahren, benötigen Sie die folgende persönliche Identifikationsnummer (PIN): $\square$ – Bitte merken Sie sich diese Nummer.
- Die Maximalpunktzahl dieser Klausur ist $6 \times 12 = 72$ Punkte. Von den sieben Aufgaben in dieser Klausur **müssen Sie** eine wegstreichen. Wenn Sie keine Aufgabe wegstreichen, wird die erste Aufgabe nicht korrigiert und nicht benotet.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte	/12	/12	/12	/12	/12	/12	/12	/72

Aufgabe 1: Grundlegende Formeln (12 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

(b) Folgern Sie für $b \neq -1$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

(c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$. Beweisen Sie Ihre Aussage.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) Wir rechnen einfach nach:

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k &= a\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) - b\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k+1}b^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k+1}\right)\\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^{k+1}\right) - b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-(k-1)}b^{k}\right) - b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^{k}\right) - b^{n+1}\\
&= a^{n+1} - b^{n+1}.
\end{aligned}$$

(b) **Wie am Anfang der Klausur erklärt: Druckfehler! Anstatt $b \neq -1$ muss es $b \neq 1$ heißen.**
Aus Teil (a) folgt

$$(1-b)\sum_{k=0}^{n} b^k = 1 - b^{n+1},$$

indem man $a = 1$ setzt. Für $b \neq 1$ kann man durch $1-b$ teilen und es folgt

$$\sum_{k=0}^{n} b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

(c) Wir betrachten die Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$. Im Falle $b = 1$ steht hier

$$\sum_{k=0}^{n} b^n = n+1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies divergiert offensichtlich.
Sei ab jetzt $b \neq 1$. Dann gilt nach Teil (b) für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\lim_n b^n = 0$ für $|b| < 1$. Es gilt also für $|b| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} b^n = \frac{1-\lim_{n\to\infty} b^{n+1}}{1-b} = \frac{1}{1-b}.$$

Wir wissen auch aus der Vorlesung, dass die Folge $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|b| > 1$ und $b = -1$ nicht konvergiert. Also divergiert die geometrische Reihe für solche b.

Aufgabe 2: Das Majorantenkriterium (12 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(a) Formulieren Sie das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Definieren Sie, was es heißt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(c) Beweisen Sie, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) Das Cauchy-Kriterium für Reihen besagt: die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(c) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Wenn wir das Cauchy-Kriterium auf die letztere Reihe anwenden, folgt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq m \geq N : \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann also für alle $n \geq m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass die ursprüngliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ das Cauchy-Kriterium erfüllt. Sie konvergiert also.

Aufgabe 3: Konvergenz von Folgen (12 Punkte)
Berechnen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen.

(a) $a_n = \frac{(n!)^5}{(n!-1)^2(n!+1)^3}$

(b) $b_n = \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$

(c) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{(n!-1)^2(n!+1)^3}{(n!)^5} &= \frac{(n!-1)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(n!+1)^3}{(n!)^3} = \left(\frac{n!-1}{n!}\right)^2 \cdot \left(\frac{n!+1}{n!}\right)^3 \\ &= \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^3\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^3\right)^{-1} = 1.$$

(b) Wir betrachten zunächst die Terme

$$\beta_n = b_n^2 = \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Es gilt dann: $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{2}$.
Es gilt weiter $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt:

$$b_n = \sqrt{b_n^2}.$$

Weil die Wurzelfunktion

$$\sqrt{-} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

stetig ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{b_n^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} b_n^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \beta_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(c) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Es folgt, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4: Grenzwerte von Funktionen (12 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, ob Sie uneigentlich existieren (d.h. der Grenzwert ist $\pm\infty$) oder ob die Terme divergieren. Wenn Sie existieren, berechnen Sie die Grenzwerte. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort sorgfältig.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^k-1}$ für $k = 1, 2, 3$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$
(Sie dürfen nicht einfach die Aussage aus der Vorlesung zitieren. Sie müssen mit der Definition der Exponentialfunktion argumentieren.)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) Für $k = 1$ gilt $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ und damit

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2.$$

Für $k = 2$ gilt $\frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$ und damit

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1.$$

Für $k = 3$ sind Zähler und Nenner von $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ überall (aber insbesondere in 1) differenzierbar. Beide Terme, Zähler und Nenner, konvergieren gegen 0 für $x \to 1$. Damit können wir die Regel von l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

(b) Nach Definition gilt:

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

1. Lösung: Weil für $x > 0$ alle Terme in der Reihe positiv sind, gilt dann:

$$\frac{e^x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \geq \frac{x^{2-1}}{2!} = \frac{x}{2} \to +\infty$$

für $x \to +\infty$.

2. Lösung: der Zähler e^x une der Nenner x sind überall differenzierbar und divergieren bestimmt gegen $+\infty$. Nach der Regel von l'Hôpital gilt dann:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Diese letzte Aussage wurde in der Vorlesung bewiesen, aber die Aufgabenstellung sagt explizit, dass Sie das nicht unbewiesen verwenden dürfen. Daher hier der Beweis: Weil für $x > 0$ alle Terme in der Reihe positiv sind, gilt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq x \to +\infty$$

für $x \to +\infty$.

Aufgabe 5: Ableitungen (12 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\; \to \mathbb{R}$ (Tangens)

(b) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = e^{\frac{x^3-1}{x+1}} \sqrt{x}$

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ g(x) = x^{n!} \sin(x)$

(d) $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}\ ,\ h(x) = \ln(2x^3)$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nach der Quotientenregel folgt dann:

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin^2(x)}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{d}{dx} e^{\frac{x^3-1}{x+1}}\right)\sqrt{x} + e^{\frac{x^3-1}{x+1}} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} \\ &= e^{\frac{x^3-1}{x+1}} \frac{3x^2(x+1) - (x^3-1)}{(x+1)^2}\sqrt{x} + e^{\frac{x^3-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= e^{\frac{x^3-1}{x+1}} \left(\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(x+1)^2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$g'(x) = n!x^{n!-1}\sin(x) + x^{n!}\cos(x) = x^{n!-1}(n!\sin(x) + x\cos(x))$$

(d) Es gilt mit der Kettenregel:

$$h'(x) = 6x^2(2x^3)^{-1} = \frac{3}{x}$$

oder alternativ mit der Funktionalgleichung des Logarithmus:

$$h(x) = \ln(2x^3) = \ln(2) + 3\ln(x)$$

also

$$h'(x) = \frac{3}{x}$$

Aufgabe 6: Kurvendiskussion (12 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$g(x) = x^2 e^x.$$

(a) Finden Sie die ersten beiden Ableitungen von g.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima von g. Berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert.

(d) Bestimmen Sie auf dem Intervall $I = [-10, 2]$ das globale Maximum von g, d.h. finden Sie $x_{\max} \in I$, so dass für alle $x \in I$ gilt:
$$g(x) \leq g(x_{\max})$$
(Ohne Beweis: $0 < e^{-1} < 1 < e$)

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Wir betrachten

$$g(x) = x^2 e^x.$$

(a) Es gilt:

$$g'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$$

und

$$g''(x) = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x.$$

(b) Die Gleichung

$$0 = g(x) = x^2 e^x$$

hat nur die Lösung $x_1 = 0$, denn die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen.
(c) Um die lokalen Extrema zu finden, lösen wir die Gleichung:

$$0 = g'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x.$$

Weil die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, muss

$$0 = 2x + x^2 = x(2 + x)$$

gelten, also $x_1 = 0$ oder $x_2 = -2$. Um herauszufinden, ob diese Werte tatsächlich lokale Extrema sind, testen wir mit der zweiten Ableitung. Es gilt

$$g''(0) = 2 > 0 \quad \text{und} \quad g''(-2) = -2e^{-2} < 0.$$

Also ist $x_1 = 0$ ein lokales Minimum und $x_2 = -2$ ein lokales Maximum. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g(-2) = \frac{4}{e^2}.$$

(d) Um auf dem $I = [-10, 2]$ das globale Maximum von g zu finden, müssen wir das lokale Maximum $x = -2$ im Inneren mit den beiden Randwerten $x_3 = -10$ und $x_4 = 2$ vergleichen. Dazu berechnen wir die Funktionswerte:

$$g(-10) = \frac{100}{e^{10}} \quad \text{und} \quad g(2) = 4e^2.$$

Aus der Vorlesung wissen wir $2 < e < 3$. Damit gilt

$$e^2 > 2^2 = 4 \quad \text{und} \quad e^{10} > 2^{10} = 1024 > 1000$$

und weiter:

$$\begin{aligned} g(-10) &= \frac{100}{e^{10}} < \frac{100}{1000} < \frac{1}{10} < 1 < 4e^2 = g(2) \\ g(-2) &= \frac{4}{e^2} < 4e^2 = g(2) \end{aligned}$$

Damit $x_{\max} = x_4 = 2$ das globale Maximum von g auf dem Intervall $I = [-10, 2]$.

Aufgabe 7: Produktregel (12 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Definieren Sie, was es heißt, daß f in x_0 differenzierbar ist.
2. Nehmen Sie jetzt an, dass f und g in x_0 differenzierbar sind. Formulieren Sie die Produktregel für den Ausdruck $(f \cdot g)'(x_0)$.
3. Beweisen Sie die Produktregel.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

(a) Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar, wenn der Limes

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Äquivalent dazu ist: ... der Limes

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.
bzw: ..., wenn $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existert mit

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies \left| \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

(b) Die Produktregel lautet in diesem Fall:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(c) Nach Voraussetzung wissen wir, dass beide Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

existieren. Damit rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)g(x)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Wir haben hier auch benutzt, dass

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

ist. Dies gilt, weil aus der Differenzierbarkeit von g bei x_0 auch die Stetigkeit von g bei x_0 folgt.

"Schmierzettel" 1

“Schmierzettel” 1 (Rückseite)

"Schmierzettel" 2