Elementare Zahlentheorie (SS 2018)
Aufgaben zum Selbsttest

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

Aufgabe 1: Fakultäten. (2 Punkte)
Es sei $1 \neq n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es gibt eine Primzahl $p \in \mathcal{P}$ mit $\nu_p(n!) = 1$.

Aufgabe 2: Diophantische Gleichungen. (3 Punkte)
Man zeige: Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 3 \pmod 4$, so hat die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = n$$

keine ganzzahlige Lösung.

Aufgabe 3: Ideale. (4 Punkte)
Es seien R ein Hauptidealbereich und $I, J \trianglelefteq R$ Ideale. (Zur Erinnerung: Alle Ideale in R sind also Hauptideale, und R ist faktoriell.)

Man zeige: Es gilt $(I + J)(I \cap J) = IJ$.

Aufgabe 4: Quotientenringe. (2+2+1 Punkte)
Man betrachte den Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ und das Ideal $I := \langle 2, X \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$.

a) Man zeige: Es ist $|\mathbb{Z}[X]/I| \leq 2$.

b) Man zeige: Es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad I \subseteq \ker(\varphi).$$

c) Daraus folgere man: Es gilt $|\mathbb{Z}[X]/I| = 2$ und $I = \ker(\varphi)$.
