Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 26.11.2019

(7.1) Aufgabe: $\mathbb{SL}_2$-Darstellungen.
Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.
a) Man zeige: Die Gruppe $\mathbb{SL}_2$ wird erzeugt von

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}; a, b, t \in \mathbb{K}, t \neq 0 \right\}.$$

b) Für $d \in \mathbb{N}_0$ betrachte man die homogene Komponente $\mathbb{K}[V]_d$ der Koordinatenalgebra des natürlichen $\mathbb{SL}_2$-Moduls V. Man gebe darstellende Matrizen der Operation der obigen Erzeuger von $\mathbb{SL}_2$ auf $\mathbb{K}[V]_d$, bezüglich der natürlichen $\mathbb{K}$-Basis aus Monomen, an.
c) Man zeige: Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ oder $d < \mathrm{char}(\mathbb{K})$, so ist $\mathbb{K}[V]_d$ ein einfacher $\mathbb{SL}_2$-Modul. Was passiert im Falle $0 < \mathrm{char}(\mathbb{K}) \leq d$?
d) Man zeige: Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, so bilden die $\mathbb{SL}_2$-Moduln $\mathbb{K}[V]_d$, für $d \in \mathbb{N}_0$, ein Repräsentantensystem der einfachen $\mathbb{SL}_2$-Moduln.

(7.2) Aufgabe: Irreduzible $\mathbb{GL}_n$-Darstellungen.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:
a) Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $\det^k \colon \mathbb{GL}_n \to \mathbb{G}_m \colon g \mapsto \det(g)^k$ eine algebraische Darstellung. Wie schränkt $\det^k$ auf $\mathbb{SL}_n$ ein?
b) Die natürliche Darstellung von $\mathbb{GL}_n$ bzw. $\mathbb{SL}_n$ ist irreduzibel.
c) Jede irreduzible Darstellung von $\mathbb{GL}_n$ schränkt irreduzibel auf $\mathbb{SL}_n$ ein, und man bekommt jede irreduzible Darstellung von $\mathbb{SL}_n$ auf diese Weise.

(7.3) Aufgabe: Lemma von Schur.
Es sei $G := \langle A, B \rangle \leq \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ die **Quaternionengruppe**, wobei

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Man zeige: Es ist $|G| = 8$ (also ist G eine algebraische Gruppe), und der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^4$ wird in natürlicher Weise zu einem einfachen G-Modul.
b) Es sei $H \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$ die von $\{A, B\}$ erzeugte $\mathbb{R}$-Unteralgebra. Man gebe eine $\mathbb{R}$-Basis von H an, und zeige, daß H ein nicht-kommutativer Schiefkörper ist.
c) Es sei $C := \mathrm{End}_G(V) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$. Man gebe eine $\mathbb{R}$-Basis von C an, und zeige, daß C ein nicht-kommutativer Schiefkörper ist. Man bestimme $H \cap C \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$. Sind H und C als $\mathbb{R}$-Algebren isomorph?

(7.4) Aufgabe: Halbeinfache Moduln.
Es sei $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe.

a) Es sei V ein $\mathbb{G}$-Modul. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) V ist halbeinfach.

ii) V ist Summe einfacher $\mathbb{G}$-Untermoduln.

iii) Jeder $\mathbb{G}$-Untermodul von V hat ein $\mathbb{G}$-invariantes Komplement.

b) Es sei V ein halbeinfacher $\mathbb{G}$-Modul. Man zeige: Jeder $\mathbb{G}$-Untermodul und jeder $\mathbb{G}$-Faktormodul von V ist halbeinfach, ebenso ist $V^\vee$ halbeinfach.