Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (WS 19/20) Abgabe bis 12.11.19

PD Dr. Jürgen Müller

(5.1) Aufgabe: Bahnenabschluß.
a) Man zeige: Die affine algebraische Gruppe $\mathbb{G} := \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ operiert regulär auf $V := \mathbb{K}^2$ durch $[x, y] \cdot [a, b] := [xa, yb]$, für $x, y \in \mathbb{K}$ und $a, b \in \mathbb{G}_m$.
b) Man betrachte die Einbettungen $\gamma\colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}\colon g \mapsto [g, 1]$ sowie $\delta\colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}\colon g \mapsto [g, g]$ und $\epsilon\colon \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}\colon g \mapsto [g, g^{-1}]$. Man bestimme die Bahnen von $\mathbb{G}$ sowie $\gamma(\mathbb{G}_m)$, $\delta(\mathbb{G}_m)$ und $\epsilon(\mathbb{G}_m)$ auf V. Welche Dimension haben sie jeweils? Man gebe zugehörige Isotropiegruppen an. Wie lautet die $\preceq$-Relation?

(5.2) Aufgabe: Ähnlichkeit.
a) Man zeige: Die affine algebraische Gruppe $\mathbb{G} := \mathbb{GL}_m \times \mathbb{GL}_n$, wobei $m, n \in \mathbb{N}_0$, operiert regulär auf $V := \mathbb{K}^{m \times n}$ durch $A \cdot [P, Q] := P^{-1}AQ$, für $A \in V$ sowie $P \in \mathbb{GL}_m$ und $Q \in \mathbb{GL}_n$. Zwei Matrizen heißen **ähnlich**, wenn sie in der gleichen $\mathbb{G}$-Bahn liegen.
b) Man bestimme die $\mathbb{G}$-Bahnen auf V. Welche Dimension haben sie jeweils? Man gebe zugehörige Isotropiegruppen an. Wie lautet jeweils die $\preceq$-Relation?

(5.3) Aufgabe: Projektive lineare Gruppen.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper sowie $\mathbb{G} := \mathbb{GL}_n$ und $\mathbb{H} := \mathbb{SL}_n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Gruppen $\mathbb{G}/Z(\mathbb{G})$ und $\mathbb{H}/Z(\mathbb{H})$ die Struktur affiner algebraischer Gruppen zu geben.
a) Man zeige: Die Gruppe $\mathbb{G}$ operiert regulär auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ durch Konjugation $A \mapsto T^{-1}AT$, für $T \in \mathbb{G}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Man gebe den Operationsmorphismus und den zugehörigen Comorphismus an.
b) Man zeige: Dadurch erhält man eine algebraische Darstellung $\alpha\colon \mathbb{G} \to \mathbb{GL}_{n^2}\colon T \mapsto T^{-\mathrm{tr}} \otimes T$. Man gebe den zugehörigen Comorphismus α^* an, und beschreibe die Unteralgebra $\mathrm{im}(\alpha^*) \subseteq \mathbb{K}[\mathbb{G}]$. Wie sieht sie im Falle $n = 2$ aus?
c) Die affine algebraische Gruppe $\mathbb{PGL}_n := \alpha(\mathbb{G})$ wird als **projektive volle lineare Gruppe** bezeichnet. Man zeige: Es gilt $\mathbb{PGL}_n \leq \mathbb{SL}_{n^2}$ und $\ker(\alpha) = Z(\mathbb{G}) = \mathbb{K}^* \cdot E_n$. Ist $\mathbb{PGL}_n$ zusammenhängend? Welche Dimension hat $\mathbb{PGL}_n$?
d) Nun sei $\beta := \alpha|_{\mathbb{H}}$ die Einschränkung von α auf $\mathbb{H} := \mathbb{SL}_n$. Man beschreibe die Unteralgebra $\mathrm{im}(\beta^*) \subseteq \mathbb{K}[\mathbb{H}]$. Für $n = 2$ vergleiche man mit Aufgabe **(3.1)**.
e) Die affine algebraische Gruppe $\mathbb{PSL}_n := \beta(\mathbb{H})$ wird als **projektive spezielle lineare Gruppe** bezeichnet. Man zeige: Es gilt $\ker(\beta) = Z(\mathbb{H}) = \{aE_n; a \in \mathbb{K}, a^n = 1\}$ und $\mathbb{PSL}_n = \mathbb{PGL}_n$. (Also ist $\mathbb{H}/Z(\mathbb{H}) \cong \mathbb{PSL}_n = \mathbb{PGL}_n \cong \mathbb{G}/Z(\mathbb{G})$ als abstrakte Gruppen.)