Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller

Abgabe bis: 14.01.2020

(10.1) Aufgabe: Additive Gruppe.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, und $V := \mathbb{K}^2$ mit Koordinatenalgebra $\mathbb{K}[X,Y]$. Dann wird V zu einem $\mathbb{G}_a$-Modul bezüglich der Darstellung $\mathbb{G}_a \to \mathbb{GL}_2 \colon t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Man zeige: Es ist $\mathbb{K}[X,Y]^{\mathbb{G}_a} = \mathbb{K}[X]$.

(10.2) Aufgabe: Zyklische Gruppen von Primzahlordnung.
Es seien $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p > 0$, und $G := \langle g \rangle \cong C_p$ die zyklische Gruppe der Ordnung p.

a) Man zeige: Durch $g \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ wird $V := \mathbb{K}^2$ zu einem G-Modul. Man bestimme V^G. Wie operiert G auf der Koordinatenalgebra $\mathbb{K}[X,Y]$ von V?

b) Man zeige: Wendet man Dade's Trick auf die Koordinatenfunktionen X und Y an, so erhält man die Invarianten $f_X = X^p$ und $f_Y = Y^p - YX^{p-1}$.

c) Man zeige: Es ist $\mathbb{K}[X,Y]^G = \mathbb{K}[X, f_Y]$. Ist $\mathbb{K}[X,Y]^G$ ein Polynomring?

(10.3) Aufgabe: Geometrische Reduktivität.
Man zeige: Eine affine algebraische Gruppe $\mathbb{G}$ ist genau dann geometrisch reduktiv, wenn es für jeden *unzerlegbaren* $\mathbb{G}$-Modul V und jeden Vektor $0 \neq v \in V^{\mathbb{G}}$ eine Invariante $f \in \mathbb{K}[V]_d^{\mathbb{G}}$, für ein $d \in \mathbb{N}$, gibt mit $f(v) \neq 0$. Gilt eine analoge Eigenschaft auch für lineare Reduktivität?

(10.4) Aufgabe: Starrheit von Tori.
Es seien $\mathbb{G}$ eine affine algebraische Gruppe, und $\mathbb{T} \leq \mathbb{G}$ eine abgeschlossene Untergruppe, die ein Torus ist. Man zeige: Es gilt $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})^\circ = C_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})^\circ$.

Hinweis. Wie operiert $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})^\circ$ auf den Elementen endlicher Ordnung in $\mathbb{T}$?