Übungen zur Vorlesung Geometrische Invariantentheorie (WS 19/20)

PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis: 15.10.2019

(1.1) Aufgabe: Quadratische Formen.
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Jede komplexe n-äre quadratische Form ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-äquivalent zu genau einer der folgenden Formen:
i) $q_{n,\delta} := \delta X_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$, für $\delta \neq 0$; **ii)** $q_r := \sum_{i=1}^{r} X_i^2$, fr $r \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Welche der obigen Formen sind $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-äquivalent?

(1.2) Aufgabe: Binäre quadratische Formen.
Es sei q eine binäre quadratische Form über $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ mit Diskriminante Δ. Man zeige:
a) Ist $K = \mathbb{C}$, so ist genau dann $\Delta = 0$, wenn q Quadrat einer Linearform ist.
b) Ist $K = \mathbb{R}$, so ist genau dann $\Delta = 0$, wenn q oder $-q$ ein Quadrat ist.

(1.3) Aufgabe: Kongruenz von Euklidischen Dreiecken.
Man betrachte die Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$. Ein Dreieck $\Delta(P_1, P_2, P_3) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist durch Angabe seiner Ecken $P_i = [x_i, y_i] \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Also kann die Menge der Dreiecke via $\Delta(P_1, P_2, P_3) \mapsto [x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ mit dem **Zustandsraum** $\mathbb{R}^6$ identifiziert werden.

a) Ein Dreieck $\Delta'(P_1', P_2', P_3')$ mit $P_i' = [x_i', y_i']$ heißt zu Δ **kongruent**, falls es eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_3$ und eine Euklidische Bewegung α auf $\mathbb{R}^2$ gibt mit $[x_i', y_i'] = [x_{i\pi}, y_{i\pi}]^\alpha$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Man beschreibe die Struktur der genannten Symmetriegruppe $\mathcal{G}$, und zeige, daß Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist.

b) Man zeige, daß $\mathcal{G}$ in natürlicher Weise durch Automorphismen auf den $\mathbb{R}$-Algebren $\mathcal{A} := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$ und $\mathcal{R} := \mathcal{A} \cap \mathbb{R}[X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3]$ operiert.

Eine **geometrische Größe** ist eine **$\mathcal{G}$-invariante** Funktion $F \in \mathcal{A}$, das heißt, es gilt $F^g = F$ für alle $g \in \mathcal{G}$. Man zeige: Die Mengen $\mathcal{A}^\mathcal{G}$ und $\mathcal{R}^\mathcal{G}$ aller $\mathcal{G}$-invarianten (polynomiellen) Funktionen sind $\mathbb{R}$-Unteralgebren von $\mathcal{A}$.

c) Man zeige: Durch

$$F(\Delta) := \left| \det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right) \right|$$

und $U(\Delta) := S_{12} + S_{13} + S_{23}$, wobei $S_{ij}(\Delta) := \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, werden geometrische Größen definiert. Sind sie polynomiell? Welche geometrische Bedeutung haben sie? Sind die S_{ij} selbst geometrische Größen?

d) Eine Menge von geometrische Größen, die Kongruenzklassen eindeutig festlegt, heißt ein System von **Bestimmungsstücken**. Man zeige: Die drei elementar-symmetrischen Polynome in S_{12}, S_{13}, S_{23} sind ein System von Bestimmungsstücken. Welche geometrische Aussage verbirgt sich dahinter?

e) Man zeige: Ein $\mathbb{R}$-Algebren-Erzeugendensystem von $\mathcal{R}^{\mathcal{G}}$ ist ein System von Bestimmungsstücken. In der Tat bilden die drei elementar-symmetrischen Polynome in $S_{12}^2, S_{13}^2, S_{23}^2$ solch ein Erzeugendensystem von $\mathcal{R}^{\mathcal{G}}$. (Können Sie das beweisen?) Man stelle F^2 als Polynom in diesem Erzeugendensystem dar.

(1.4) Aufgabe: Geometrische Größen.
Man betrachte weiter die Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$. Man bestimme analog zu Aufgabe (1.3) Systeme von Bestimmungsstücken sowie die $\mathbb{R}$-Algebren $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ und $\mathcal{R}^{\mathcal{G}}$ für **i)** die Punkte in $\mathbb{R}^2$ und **ii)** die Strecken in $\mathbb{R}^2$.