

Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“ Blatt 8

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie jeweils drei verschiedene nichttriviale Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung

$$X^2 - dY^2 = 1$$

für

- (a) $d = 5$.
- (b) $d = 6$.
- (c) $d = 11$.
- (d) $d = 37$.

Aufgabe 2.

- (a) Sei $m \in \mathbb{Z}$, sei $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der Gleichung

$$X^2 - dY^2 = m$$

und sei $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der Gleichung

$$X^2 - dY^2 = 1 :$$

Zeigen Sie, dass

$$(ux + dvy, uy + vx)$$

eine Lösung der Gleichung

$$X^2 - dY^2 = m$$

ist.

- (b) Bestimmen Sie drei verschiedene Lösungen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung

$$X^2 - 2Y^2 = 7.$$

Sei $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ der in der Vorlesung definierte Hamiltonsche Schiefkörper.

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass in \mathbb{H} die Distributivgesetze gelten.

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie die inversen Elemente der folgenden Elemente $\alpha \in \mathbb{H}$.

(a) $\alpha = i + j + k.$

(b) $\alpha = 1 - 2i + 3j - 4k.$

(c) $\alpha = ijk.$

(d) $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot k.$