Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender
BU Wuppertal
SS 2019

Abgabe bis 29.05.2019, 11h, in das
Postfach 110, Gebäude D.13

Übungen zur Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“
Blatt 7

Aufgabe 1.

Ernie, Bert and the Cookie Monster want to measure the length of Sesame Street. Each of them does it his own way. Ernie relates: ‘I made a chalk mark at the beginning of the street and then again every seven feet. There were two feet between the last mark and the end of the street.’ Bert tells you: ‘Every eleven feet, there are lamp posts in the street. The first one is five feet from the beginning, and the last one is exactly at the end of the street.’ Finally, the Cookie Monster says: ‘Starting at the beginning of Sesame Street, I put down a cookie every thirteen feet. I ran out of cookies twenty-two feet from the end.’ All three agree that the length does not exceed one thousand feet.

How long is sesame street?

Aufgabe 2.

Man untersuche die folgenden Kongruenzen

$$aX \equiv b \pmod{n}$$

auf Lösbarkeit in $\mathbb{Z}$, und bestimme gegebenenfalls alle Lösungen:

(a) $a = 13, b = 32, n = 35.$.

(b) $a = 33, b = 15, n = 273.$

(c) $a = 51, b = 35, n = 119.$

Aufgabe 3.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = n$$

genau dann in $\mathbb{Z}$ lösbar ist, wenn jeder Primfaktor p_i von n mit $p_i \equiv 3 \pmod{4}$ eine gerade Potenz r_i besitzt.

Aufgabe 4.

Welche der nachfolgenden Zahlen n sind darstellbar als Summe

$$n = x^2 + y^2$$

von zwei Quadraten mit $x, y \in \mathbb{Z}$? Entscheiden Sie erst anhand des Kriteriums aus Aufgabe 1 und geben Sie dann (falls möglich) eine Darstellung an:

(a) $n = 101.$

(b) $n = 641.$

(c) $n = 2989.$

(d) $n = 9295.$