Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

(9.1) Aufgabe: Chinesischer Restsatz.
Man untersuche die folgenden Systeme linearer Kongruenzen auf Lösbarkeit, und bestimme gegebenenfalls alle Lösungen:

i)

$$X \equiv 21 \pmod{72}, \quad X \equiv 69 \pmod{75}, \quad X \equiv 99 \pmod{100}$$

ii)

$$X \equiv 21 \pmod{72}, \quad X \equiv 69 \pmod{75}, \quad X \equiv 61 \pmod{100}$$

(9.2) Aufgabe: How long is Sesame Street?
Ernie, Bert and the Cookie Monster want to measure the length of Sesame Street. Each of them does it his own way. Ernie relates: 'I made a chalk mark at the beginning of the street and then again every seven feet. There were two feet between the last mark and the end of the street.' Bert tells you: 'Every eleven feet, there are lamp posts in the street. The first one is five feet from the beginning, and the last one is exactly at the end of the street.' Finally, the Cookie Monster says: 'Starting at the beginning of Sesame Street, I put down a cookie every thirteen feet. I ran out of cookies twenty-two feet from the end.' All three agree that the length does not exceed one thousand feet.

(9.3) Aufgabe: Direkte Summen von Restklassenringen.
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es gibt einen Ringisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/\mathrm{ggT}_+(m,n)\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/\mathrm{kgV}_+(m,n)\mathbb{Z}).$$

(9.4) Aufgabe: Teilerfremde Ideale.
Es seien R ein kommutativer Ring, und $I_1, \ldots, I_k \trianglelefteq R$, für $k \in \mathbb{N}$, paarweise **teilerfremde** Ideale, das heißt, es gilt $I_i + I_j = R$ für alle $i < j \in \{1, \ldots, k\}$.

a) Man zeige: Es gilt $\prod_{i=1}^k I_i = \bigcap_{i=1}^k I_i \trianglelefteq R$.

b) Man zeige: Die Abbildung $\nu\colon R \to \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}/I_i \colon x \mapsto [x + I_1, \ldots, x + I_k]$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker(\nu) = \bigcap_{i=1}^k I_i \trianglelefteq R$.