Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

(5.1) Aufgabe: Quadratische Zahlringe für $4 \mid (d-1)$.
Es seien $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei mit $4 \mid (d-1)$, und

$$R_d = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] := \{a + b\frac{1+\sqrt{d}}{2} \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Man zeige:

a) R_d ist ein kommutativer Ring, und es gilt

$$R_d = \{\frac{1}{2}(a + b\sqrt{d}) \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \mid (a-b)\}.$$

Außerdem wird durch $N\colon R_d \to \mathbb{Z}\colon z \mapsto z \cdot \kappa(z)$, wobei κ die Konjugation sei, eine multiplikative Abbildung mit Werten in $\mathbb{Z}$ definiert.

b) Es gilt $R_d^* = \{z \in R_d; |N(z)| = 1\}$. Daraus folgere man: Ist $d < 0$, so ist R_d^* endlich. Genauer gilt $R_d^* = \{\pm 1\}$ für $d \leq -7$, und $R_{-3}^* = \{\pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\}$.

c) Für $d \in \{-11, -7, -3, 5, 13\}$ ist R_d Euklidisch bezüglich der Gradabbildung $R_d \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0\colon z \mapsto |N(z)|$.

(5.2) Aufgabe: Quadratische Zahlringe als faktorielle Ringe.
Es seien $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei, sowie $\mathcal{O}_d := \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ falls $4 \nmid (d-1)$, und $\mathcal{O}_d := \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ falls $4 \mid (d-1)$. Durch Betrachtung geeigneter Faktorisierungen zeige man für möglichst viele der folgenden Fälle (das sind alle mit $|d| \leq 30$), daß $\mathcal{O}_d$ *nicht* faktoriell ist:

a) $d \in \{-5, -6, -10, -13, -14, -15, -17, -21, -22, -23, -26, -29, -30\}$.

b) $d \in \{10, 15, 26, 30\}$.

(5.3) Aufgabe: Diophantische Gleichungen.
Man zeige, daß die Gleichung $X^3 = Y^2 + 1$ nur die ganzzahligen Lösungen $x = 1$ und $y = 0$ hat.

Hinweis. Man benutze den Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen.

(5.4) Aufgabe: Quadratzahlen.
Man zeige, daß sich unter den Summen $1 + 2 + \cdots + n$, für $n \in \mathbb{N}$, unendliche viele Quadratzahlen befinden.

Hinweis. Man benutze die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$.

Abgabe: 17.05.2018 (Donnerstag), bis 10:00 Uhr.