

Übungen zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie (SS 18)

PD Dr. Jürgen Müller, Dr. Martin Bender

(11.1) Aufgabe: Ganzzahlige Nullstellen.

Es sei $f := X^4 + 25X^3 + 129X^2 + 60X + 108 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Man untersuche die polynomielle Kongruenz $f \equiv 0 \pmod{5^k}$ auf Lösbarkeit in $\mathbb{Z}/5^k\mathbb{Z}$, und bestimme gegebenenfalls alle Lösungen, für $k \in \{1, \dots, 3\}$.

b) Wie kann man daraus die Nullstellen von f in \mathbb{Z} bestimmen?

(11.2) Aufgabe: Dezimaldarstellung.

Man bestimme die letzten drei Ziffern der Dezimaldarstellung von 9^{9^9} .

(11.3) Aufgabe: Satz von Euler.

Für teilerfremde $a, n \in \mathbb{N}$ zeige man (ohne Benutzung des Satzes von Lagrange):
Es gilt $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Hinweis. Man benutze die Abbildung $\lambda_a: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n: x \mapsto ax \pmod{n}$, und betrachte das Produkt über alle teilerfremden Reste modulo n .

(11.4) Aufgabe: Primitivwurzeln.

Man bestimme alle Primitivwurzeln modulo p , für alle Primzahlen $p < 50$.