

## Probeklausur Lineare Algebra II - Musterlösung

### Aufgabe 1

Man erhält eine Bijektion  $\phi : (K^n)^{\times n} \xrightarrow{\cong} \text{Mat}_K(n \times n)$ , indem man ein  $n$ -Tupel von Vektoren  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in (K^n)^{\times n}$  als Spaltenvektoren einer Matrix auffasst.

Dann sind für  $F : \text{Mat}_K(n \times n) \rightarrow K$  folgende zwei Bedingungen hinreichend, so dass  $F = \det$  gilt:

- (i)  $F \circ \phi$  ist eine alternierende Multilinearform.
- (ii)  $F(E_n) = 1$ .

Begründung: Nach Satz 16.11 ist  $\dim(\text{Alt}_n(K^n)) = 1$  und somit ist jede alternierende Multilinearform dieses Typs bereits durch ihren Wert an  $E_n$  eindeutig bestimmt, d.h. Bedingungen (i) und (ii) bestimmen eine eindeutige Abbildung. Nach Lemma 16.6 erfüllt  $\det$  diese beiden Bedingungen.

### Aufgabe 2

- (i) Sei  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , dann ist  $\chi_{A_1} = (t-1)^2$ , also ist 1 der einzige Eigenwert.

Aber  $\dim(\ker(A_1 - E_2)) = 1$ , und somit spannen die Eigenräume (in diesem Fall nur  $V_1$ ) nicht den ganzen Raum auf. Nun folgt aus Satz 19.14, dass  $A_1$  nicht diagonalisierbar sein kann.

- (ii) Sei  $A_2 = E_2$ , dann ist  $\chi_{A_2} = (t-1)^2$ .

Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt (Satz 20.16), und beide dieselben Nullstellen haben (Übungsaufgabe 27), folgt dass  $p_{A_2} \in \{t-1, (t-1)^2\}$ .

Da  $ev_{A_2}(t-1) = A_2 - E_2 = 0$  folgt  $p_{A_2} = t-1 \neq \chi_{A_2}$ .

- (iii) Sei  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , dann ist  $\chi_{A_3} = (t-1)^2$ . Analog zu (ii) folgt, dass  $p_{A_3} \in \{t-1, (t-1)^2\}$ .

Da  $ev_{A_3}(t-1) = A_3 - E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$  folgt nun  $p_{A_3} = (t-1)^2 = \chi_{A_3}$ .

### Aufgabe 3

Für  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(3 \times 3)$  gilt:

$$\chi_A = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + \sum_{i=1}^3 \det(A_{ii})t - \det(A)$$

Im vorliegenden Fall bedeutet dies:

$$\chi_A = t^3 + t^2 - t - 1 = t^2(t+1) - (t+1) = (t^2 - 1)(t+1) = (t-1)(t+1)^2$$

Analog zu Aufgabe 2 (ii) folgt:  $p_A \in \{(t-1)(t+1), (t-1)(t+1)^2\}$ .

Da  $ev_A((t-1)(t+1)) = ev_A(t^2 - 1) = A^2 - E_3 = 0$ , folgt  $p_A = t^2 - 1$ .

(Man überprüfe, dass tatsächlich  $A^2 = E_3$  gilt)

#### Aufgabe 4

Für  $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$  gilt:

$$\chi_A = t^2 - \text{tr}(A)t + \det(A)$$

Im vorliegenden Fall bedeutet dies:  $\chi_A = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$ . Insbesondere ist 1 der einzige Eigenwert von  $A$ .

Analog zu Aufgabe 2 (ii) folgt:  $p_A \in \{t - 1, (t - 1)^2\}$ .

Da  $ev_A(t - 1) = A - E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$ , folgt  $p_A = t^2 - 2t + 1$ .

Ferner ist  $V_1 = \ker(A - E_2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

Aus dem Satz über die Hauptraumzerlegung (Satz 22.3) folgt  $\text{Hau}(A, 1) = \mathbb{R}^2$ , da 1 der einzige Eigenwert ist.

Nun ergänzen wir den Eigenvektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^2 = \text{Hau}(A, 1)$  fassen diese als Spaltenvektoren einer Matrix  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  auf und zeigen nun, dass diese die geforderten Bedingungen erfüllt:

Aus Satz 16.20 folgt:  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und wir berechnen:  $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = D + N$  mit der

Diagonalmatrix  $D = E_2$  und der nilpotenten Matrix  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Schließlich kommutieren  $D$  und  $N$ , da  $E_2$  mit jeder Matrix kommutiert.

#### Aufgabe 5

1. Falsch:

Gegenbeispiel: Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $n > 0$  gilt:  $A^n = A \neq 0$

2. Richtig:

Erfüllt  $A$  die genannten Bedingungen, so ist  $A$  trigonalisierbar, mit Nulleinträgen auf der Diagonale. Nach Präsenzaufgabe 24 ist Nilpotenz unabhängig von der Wahl der Basis, und nach Übungsaufgabe 30 sind alle oberen Dreiecksmatrizen mit Nulleinträgen auf der Diagonale nilpotent.

3. Falsch:

Gegenbeispiel:  $A = B = E_n, \alpha = -\beta = 1$ .

4. Richtig:

Da  $\det(A)\det(B) = \det(AB) \neq 0$ , folgt  $\det(A), \det(B) \neq 0$ , also sind  $A$  und  $B$  invertierbar.

#### Aufgabe 6

Da  $A$  nilpotent ist, existiert  $m > 0$  mit  $A^m = 0$ . Nun berechnen wir:

$$(E_n - A)\left(\sum_{i=0}^{m-1} A^i\right) = \sum_{i=0}^{m-1} (A^i - A^{i+1}) = E_n + \sum_{i=1}^{m-1} (-A^i + A^i) - A^m = E_n$$

Also ist  $E_n - A$  invertierbar mit Inversem:  $(\sum_{i=0}^{m-1} A^i)$ .