Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Falk Beckert

Sommersemester 2015
8.6.2015

Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 8

Abgabefrist: Montag, den **15.6.2015** bis **10:10** Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 27

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper and $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass dann p_f und χ_f die gleichen Nullstellen haben.

Aufgabe 28

Sei $V = K^2$. Geben Sie je ein Beispiel für ein $f \in \mathrm{End}_K(V)$ an, dass weder nilpotent noch ein Automorphismus ist und für das gilt

(i) $f = f^2$ (So eine Abbildung heisst *Projektor* oder *idempotent*)

(ii) $f \neq f^2$

Zusatz (2 Extrapunkte): Gibt es ein f wie in (ii), für das $f^2 = f^3$ oder $f = f^3$ gilt?

Aufgabe 29

Eine Teilmenge $I \subseteq R$ eines kommutativen Ring R heißt ein *Ideal*, wenn gilt:

$$a, b \in I \Rightarrow a + b \in I \quad \text{und} \quad a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I.$$

(i) Sind die geraden Zahlen ein Ideal in $\mathbb{Z}$? Sind die ungeraden Zahlen ein Ideal in $\mathbb{Z}$?

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathrm{End}_K(V)$ die Untermenge $\mathrm{Ker}(\varphi_f) \subset K[t]$ ein Ideal ist, wobei $\varphi_f : K[t] \to \mathrm{End}_K(V)$ die Abbildung $g \mapsto g(f)$ ist.

Aufgabe 30

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie: Besitzt V eine Basis X, so dass

$$M_{f,X,X} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

dann ist f nilpotent.