Universität Wuppertal
Fachbereich C, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Falk Beckert

Sommersemester 2015
11.5.2015

Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 5

Abgabefrist: Montag, den **18.5.2015** bis **10:10** Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 17
Sei K ein Körper und $f = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in K[t]$ ein Polynom. Die Ableitung f' wird durch

$$f' := \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\alpha \in K$ genau dann eine mehrfache Nullstelle von f ist, wenn α gleichzeitig eine Nullstelle von f sowie von f' ist.

Aufgabe 18
Sei K ein Körper. Für ein Polynom $f \in K[t]$ definiere man (vgl. Bemerkung 17.7 aus der Vorlesung) eine Abbildung $\tilde{f} : K \to K$, $\lambda \mapsto f(\lambda)$.
Diese Zuordnung ergibt eine Abbildung $\tilde{\ } : K[t] \to \mathrm{Abb}(K, K)$, $f \mapsto \tilde{f}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\ }$ surjektiv, aber nicht injektiv ist, falls der Körper K endlich ist.

Aufgabe 19
Beweisen Sie die *Vorzeichenregel*:
Angenommen, das Polynom

$$f(t) = t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \in \mathbb{R}[t]$$

mit $\alpha_0 \neq 0$ hat reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann gilt:

1. Genau dann sind alle Nullstellen λ_i negativ, wenn alle Koeffizienten α_j positiv sind.
2. Genau dann sind alle Nullstellen λ_i positiv, wenn die Vorzeichen der Koeffizienten α_j alternierend sind, d.h. es ist
   $(-1)^{n-j} \alpha_j > 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$.