



## Verifikationsnumerik I

WS 2016/17

### Übungsblatt 5

#### Aufgabe 16: *Distributivität*

**Definition (Hilfsfunktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ):**

Sei  $[0, 0] \neq [a] \in \mathbb{R}$ . Dann definieren wir

$$\chi([a]) = \chi[a] := \begin{cases} \frac{a}{\bar{a}} & \text{für } |a| \leq |\bar{a}| \\ \frac{\bar{a}}{a} & \text{für } |a| > |\bar{a}| \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass für die Intervalle  $[a], [b], [c] \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  genau dann das Distributivgesetz  $[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c]$  gilt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(D1)  $\chi[a] = 1$

(D2)  $0 \leq \chi[a] < 1 \wedge [b] \geq 0 \wedge [c] \geq 0$

(D3)  $0 \leq \chi[a] < 1 \wedge \max\{\chi[b], \chi[c]\} \leq 0$

(D4)  $\chi[a] < 0 \wedge \chi[a] \leq \min\{\chi[b], \chi[c]\} \wedge \check{b} \cdot \check{c} \geq 0$

(D5)  $\chi[a] < 0 \wedge \chi[a] \geq \max\{\chi[b], \chi[c]\}$

#### Aufgabe 17: *Intervallgleichungen*

- Existieren reelle Intervalle  $[x], [y] \in \mathbb{R}$  mit  $[2, 3] - [x] = [1, 2]$   
bzw. mit  $[1, 5] + [y] = [-6, 12]$ ?
- Für welche Intervalle  $[a] \in \mathbb{R}$  existiert ein  $[x] \in \mathbb{R}$  mit  $[a] - [x] = [1, 1]$ ?
- Zeigen Sie, dass für  $[a], [b] \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Intervallgleichung  $[a] \cdot [x] = [b]$  genau dann lösbar ist, wenn  $\chi[a] \geq \chi[b]$  gilt. Es gibt genau dann mehrere Lösungen, wenn  $\chi[a] = \chi[b] \leq 0$  erfüllt ist.

### Aufgabe 18: *Bisektionsverfahren*

Programmieren Sie das Bisektionsverfahren zur Einschließung aller Nullstellen einer stetigen Funktion einer reellen Variablen in C-XSC. Achten Sie bei der Programmierung darauf, dass auch Sonderfälle korrekt behandelt werden. Geben Sie bei der Ausgabe für jeden Bereich an, ob eine Nullstellenverifikation möglich war oder nicht. Verwenden Sie zum Abspeichern der Ergebnisintervalle einen geeigneten Datentyp wie z.B. den Containertyp für eine Liste aus der „STL“. Um diese Liste kurz zu halten, sollen überlappende Bereiche jeweils zu einem Intervall zusammengefasst werden.

Testen Sie Ihr Programm mit den folgenden Funktionen und den angegebenen Startintervallen:

$$f_1(x) = e^{-3x} - \sin^3 x \quad \text{auf } [0, 20]$$

$$f_2(x) = -\sum_{k=1}^5 k \cdot \sin((k+1)x + k) \quad \text{auf } [-5, 5]$$

$$f_3(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad \text{auf } [-1, 2]$$

$$f_4(x) \equiv 0 \quad \text{auf } [1, 2]$$

$$f_5(x) \equiv 1 \quad \text{auf } [1, 2]$$

$$f_6(x) = \sin^2 x - (1 - \cos 2x)/2 \quad \text{auf } [-1, 1]$$

$$f_7(x) = x^2 \quad \text{auf } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$f_8(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 10 - 2x & x > 4 \end{cases} \quad \text{auf } [-1, 6]$$