BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN /
SOFTWARETECHNOLOGIE
Dr. W. Hofschuster

Verifikationsnumerik I

WS 2016/17

Übungsblatt 3

Aufgabe 8: *Sinusfunktion für Intervalle in C-XSC*

Entwerfen Sie in C–XSC ein Unterprogramm, welches für Intervalle $[x] \in I\!\!R$ zwei Werte $a, b \in [x]$ so bestimmt, dass

$$\sin([x]) = [\min_{x\in[x]} \sin x, \quad \max_{x\in[x]} \sin x] = [\sin a, \quad \sin b]$$

gilt. (Approximations- bzw. Rundungsfehler dürfen dabei zur Vereinfachung außer acht gelassen werden.)

Überlegen Sie sich einen Satz von Testdaten, so dass jede Fallunterscheidung, die in Ihrem C–XSC Unterprogramm vorkommt, mindestens einmal ausgeführt wird. Schreiben Sie dann ein Programm zum Testen Ihres Unterprogramms mit Hilfe dieser Testdaten.

Aufgabe 9: *Exakter Wertebereich*

Finden Sie zu den angegebenen Ausdrücken äquivalente Ausdrücke, deren intervallmäßige Auswertung den exakten Wertebereich ergibt:

a) $f(x) = x/(x+2)$ für $[x] = [1, 2]$ und $[x] = [-1, 1]$.

b) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, a \neq 0, [x] \in I\!\!R$.

Bestimmen Sie für *a)* $W_f([x])$ und $f([x])$ sowohl von Hand, als auch auf dem Rechner mit C–XSC.

Aufgabe 10: *Wertebereichsüberschätzung*

Zeigen Sie, dass die intervallmäßige Auswertung des Ausdrucks $g(\xi) = \dfrac{1}{4 + \xi^2 - 2\xi}$ den tatsächlichen Wertebereich beliebig stark überschätzen kann.

– bitte wenden –

Aufgabe 11: *komplexe Rechteckarithmetik*

Im folgenden bezeichnet $I\mathbb{C}_\square$ die Menge der komplexen Rechteckintervalle.

a) Zeigen Sie, dass für $[z] := [2,4]$ und $[z]' := 1+i$ die Beziehungen

$$\{u \cdot v \mid u \in [z],\ v \in [z]'\} \ \subset\ [z] \cdot [z]'$$

und

$$[z]([z]'[z]') \neq ([z][z]')[z]'$$

gelten.

b) Zeigen Sie, dass für $[z] := [-1,1],\ [z]' := [1,2] \in I\mathbb{C}_\square$ gilt

$$\{u/v \mid u \in [z],\ v \in [z]'\} = [-1,1] \ \subset\ \frac{[z]}{[z]'}.$$

c) Zeigen Sie für $\circ \in \{+,-,\cdot,/\}$ und $[z],[z]' \in I\mathbb{C}_\square$ die Inklusionsbeziehung

$$\{u \circ v \mid u \in [z],\ v \in [z]'\} \quad \subseteq \quad [z] \circ [z]'. \qquad (*)$$

Für die Addition und die Subtraktion gilt Gleichheit in $(*)$. Für die Multiplikation gilt Gleichheit im Allgemeinen nur, wenn die linke Seite von $(*)$ durch die zugehörige Intervallhülle ersetzt wird. Für die Division gilt selbst in diesem Fall nicht notwendigerweise Gleichheit (Beispiele angeben!).

d) Skizzieren Sie für $[z] := [1,2] + i[1,2]$ und $[z]' := [3,4] + i[3,4]$ die Mengen

$$\{u \cdot v \mid u \in [z],\ v \in [z]'\}$$

und

$$[z] \cdot [z]'.$$

e) Zeigen Sie für $I\mathbb{C}_\square$:

- α) Die Addition ist kommutativ und assoziativ.
- β) Die Multiplikation ist kommutativ, aber nicht assoziativ.
- γ) Es gilt die Subdistributivität.
- δ) $(I\mathbb{C}_\square, +)$ und $(I\mathbb{C}_\square, \cdot)$ besitzen neutrale Elemente, sind aber keine Gruppen.
- ϵ) $(I\mathbb{C}_\square, \cdot)$ ist nullteilerfrei.

f) Bestimmen Sie für $W = [-4,-3] + i[-2,0] \in I\mathbb{C}_\square$ eine flächenoptimale Einschließung durch ein achsenparalleles Rechteck von $1/W$, d.h. die Intervallhülle $\square(1/W)$.

Berechnen Sie zum Vergleich eine Einschließung von $1/W$ mit Hilfe der in der Vorlesung definierten Divisionsoperation.