BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN /
SOFTWARETECHNOLOGIE
Dr. W. Hofschuster

Verifikationsnumerik I

WS 2016/17

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: *Installation von C-XSC, erste Beispielprogramme*

a) Installation von C-XSC:
Besorgen Sie sich die aktuellen C++-Quellen der Klassenbibliothek C-XSC von den WWW-Seiten zu den XSC-Sprachen: `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~xsc/` unter dem Unterpunkt „C-XSC“ → „Free Download (Library)“. Zur Zeit aktuell ist die Version „C-XSC 2.5.4“.
Übersetzen und installieren Sie diese Bibliothek in Ihrem eigenen Homeverzeichnis. Beachten Sie dabei die Informationen in der Textdatei „README“.

b) Schreiben Sie für die folgende Problemstellung ein einfaches, kurzes C++-Programm. Vergleichen Sie das angegebene Ergebnis mit dem von Ihren Programmen berechneten Ergebnis. Was ist die Ursache für eventuell auftretende Unterschiede (korrektes Programm vorausgesetzt)? Geben Sie eine kurze Begründung an.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$y = (a_{21}/a_{11})/(a_{21} \cdot a_{12}/a_{11} - a_{22}) \quad \text{und} \quad x = -a_{22}/a_{21} \cdot y$$

Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Werte:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 64919121.0, \quad a_{12} = -159018721.0, \\ a_{21} &= 41869520.5, \quad a_{22} = -102558961.0. \end{aligned}$$

Das *korrekte* Ergebnis lautet $x = 205117922.0, y = 83739041.0$

c) Ersetzen Sie in Ihrem Programm aus Teilaufgabe b) den verwendeten Gleitkommadatentyp durch die C-XSC Klasse `real` aus dem Namensbereich `cxsc`. Hierzu müssen Sie das Headerfile `real.hpp` mittels einer Include-Anweisung einbinden. Welches Ergebnis erhalten Sie jetzt?

d) Ersetzen Sie nun in Ihrem Programm die Klasse `real` durch die Intervallklasse `interval` (Headerfile `interval.hpp`). Welche Aussagen können aus dem berechneten Ergebnis abgeleitet werden?

e) Ändern Sie Ihr Programm so ab, dass Sie die Intervalllangzahlarithmetik von C-XSC (Klasse `l_interval`, Headerfile `l_interval.hpp`) verwenden können. Stellen Sie die verwendete Rechengenauigkeit mit `stagprec=3;` ein. Ist das berechnete Ergebnis exakt? Was passiert, wenn Sie für die Rechengenauigkeit den Wert 1 oder 2 einstellen?

f) Übersetzen Sie mit „make examples" die Beispielprogramme, die mit der C-XSC Bibliothek ausgeliefert werden. Starten Sie diese mit verschiedenen Eingabedaten. Weitere Erläuterungen zu diesen Programmen finden Sie im Preprint „C-XSC 2.0 – A C++ Class Library for Extended Scientific Computing".

g) Mit Hilfe des Programms `darstellbar.cpp` kann getestet werden, ob eine dezimal angegebene Gleitkommazahl exakt im binären Gleitkommaraster darstellbar ist oder nicht. Speichern Sie den Quelltext dieses Programms von der WWW-Seite zur Vorlesung in Ihrem eigenen Homeverzeichnis. Übersetzen Sie dieses Programm sowohl ohne als auch mit Hilfe eines Makefiles. Beachten Sie, dass dabei die C-XSC Bibliothek vom Linker hinzugebunden werden muss.

Aufgabe 2: *Zuverlässigkeit berechneter Ergebnisse*

Schreiben Sie für die folgenden Problemstellungen jeweils ein einfaches, kurzes C++-Programm. Vergleichen Sie die angegebenen Ergebnisse mit den von Ihren Programmen berechneten Ergebnissen. Was ist die Ursache für eventuell auftretende Unterschiede (korrektes Programm vorausgesetzt)? Geben Sie eine kurze Begründung an.

1. Berechnung des Ausdrucks $\sqrt{|\cos(4a+b) - 6.123 \cdot 10^{-17}|}$
   mit den Werten $a = 0.3926990815$ und $b = 7.948966 \cdot 10^{-10}$.
   Das *korrekte* Ergebnis ist $6.48063872688180\ldots \cdot 10^{-9}$.

2. Berechnung des Ausdrucks $a^2 + b^2 - c^2 + d^2 - e^2$
   für $a = 320000$, $b = 19.0\,/\,32768.0$, $c = 39.0\,/\,65536.0$, $d = 240000$, $e = 400000$
   Erzwingen Sie durch Klammerung die folgenden Auswertereihenfolgen:

   $$(((a^2 + b^2) - c^2) + d^2) - e^2$$
   $$((a^2 + b^2) - c^2) + (d^2 - e^2)$$
   $$(a^2 + (b^2 - c^2)) + (d^2 - e^2)$$
   $$a^2 + ((b^2 - c^2) + (d^2 - e^2))$$
   $$(b^2 - c^2) + (d^2 - e^2 + a^2)$$

   Das *korrekte* Ergebnis ist übrigens $-1.7927959561347\ldots \cdot 10^{-8}$.

3. Berechnen Sie den Wert des Skalarproduktes $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ für
   $x = (10^{20}, -2168, 10^{18}, 10^{15}, 3, -10^{12}, 6)^T$ und $y = (10^{20}, 2, -10^{22}, 10^{13}, 2111, 10^{16}, 3)^T$.
   Das *richtige* Ergebnis ist 2015.

4. Polynomauswertung: $$p(x,y) = \frac{1}{107751}(1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832)$$

   Berechnen Sie $p(x_0, y_0)$ für $x_0 = 192119201$ und $y_0 = 35675640$.

   Durch algebraische Umformungen lassen sich äquivalente Darstellungen für $p(x,y)$ finden, z.B.
   $$p(x,y) = \frac{xy^2}{107751}(1682y^2 + 29) + \frac{x^3}{107751}(3 - 2x^2) + \frac{832}{107751}.$$

   Welches Ergebnis erhalten Sie bei Auswertung dieser Darstellung?
   Das *korrekte* Ergebnis ergibt das Todesjahr des berühmten Mathematikers Euler.