BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN /
SOFTWARETECHNOLOGIE
Dr. W. Hofschuster

Verifikationsnumerik I

WS 2016/17

Übungsblatt 9

Aufgabe 30: *Einfache mehrdimensionale Probleme*

In den aktuellen C-XSC Versionen ist die Bibliothek „*C++ Toolbox for Verified Computing*“ enthalten.

Berechnen Sie Lösungseinschließungen für die folgenden mehrdimensionalen Problemstellungen. Verwenden Sie dabei Programme und Lösungsroutinen aus der Bibliothek „*C++ Toolbox for Verified Computing*“.

a) Lösen Sie nochmals das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den von Aufgabe 1b) vom 1. Aufgabenblatt bekannten Werten

$$\begin{aligned} a_{11} &= 64919121.0, \quad a_{12} = -159018721.0, \\ a_{21} &= 41869520.5, \quad a_{22} = -102558961.0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$a_{ij} = \binom{n+i-1}{i-1} \cdot \binom{n-1}{n-j} \cdot \frac{n}{i+j-1}, \quad b_i = i, \quad i,j = 1,\ldots,n$$

mit $n = 5$ und $n = 10$. Die hier verwendete Matrix heißt Boothroyd-Dekker Matrix. Sie wird sehr häufig zu Testzwecken herangezogen.

c) Geben Sie die Inverse der Boothroyd-Dekker Matrix (siehe Teilaufgabe b)) an.

d) Erhöhen Sie (ausgehend von $n = 5$) die Dimension n für die Hilbertmatrix $H = (h_{ij})$ mit

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

solange, bis das Gleichungssystem $Hx = (1, 1, \ldots, 1)^T$ mit der Funktion `LinSolve()` nicht mehr gelöst werden kann.

e) Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem:

Maximiere $50x_1 + 9x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\ x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

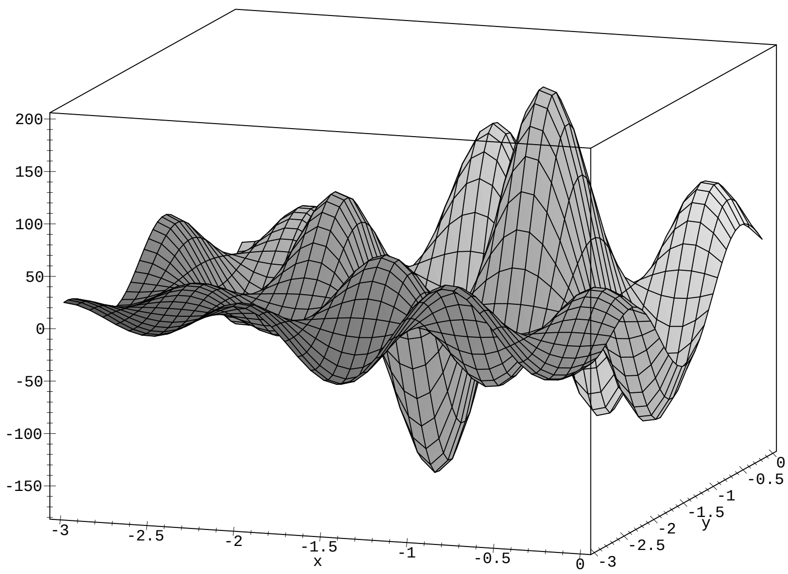
Bestimmen Sie die Lösung dieses Problems zunächst per Hand.

f) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ mit

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1^2 - 20x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 100 \\ f_2(x) &= x_1^2 - 22x_1 + x_2^2 - 2x_x + 121 \end{aligned}$$

g) Finden Sie im Bereich $[-10, 10] \times [-10, 10]$ Einschließungen für das globale Minimum und alle globalen Minimalstellen der Funktion $L_5 : I\!R^2 \to I\!R$ von Levy

$$\begin{aligned} L_5(x) &= \sum_{i=1}^{5} i\cos((i-1)x_1 + i) \sum_{j=1}^{5} j\cos((j+1)x_2 + j) \\ &\quad + (x_1 + 1.42513)^2 + (x_2 + 0.80032)^2. \end{aligned}$$



Graph der Funktion L_5 von Levy im Bereich $[-3, 0] \times [-3, 0]$

Berücksichtigen Sie bei der Problemspezifikation auch auftretende Konvertierungsfehler.