Zur Berechnung von verlässlichen Außen- und Inneneinschließungen bei parameterabhängigen linearen Gleichungssystemen

Walter Krämer[*] [1] and **Evgenija D. Popova**[**2]

[1] Bergische Universität Wuppertal, Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften, 42119 Wuppertal

[2] Bulgarian Academy of Sciences, Institute of Mathematics & Informatics, 1113 Sofia, Bulgaria

Es wird ein selbstverifizierendes Verfahren zur Berechnung von Innen- und Außeneinschließungen der Lösungsmenge eines parameterabhängigen linearen Gleichungssystems bei affin-linearer Parameterabhängigkeit besprochen. Entsprechende open-source-Software wird online zur Verfügung gestellt.

1 Einleitung und Bezeichnungsweisen

Betrachtet wird eine Familie von linearen Gleichungssystemen $A(p) \cdot x = b(p)$ wobei $A(p) \in I\!R^{n\times n}$ und $b(p) \in I\!R^n$ affin linear von einem Parametervektor $p \in I\!R^k$ abhängen. Variiert nun p im Bereich des Intervallvektors $[p] \in II\!R^k$ so wird die Menge der Lösungen aller Punktsysteme $A(p) \cdot x = b(p)$, $p \in [p]$ als parametrische Lösungsmenge bezeichnet und wie folgt notiert:

$$\Sigma^p = \Sigma\left(A(p), b(p), [p]\right) \quad := \quad \{x \in I\!R^n \mid \exists p \in [p] \text{ mit } A(p) \cdot x = b(p)\}$$

Ein einfaches Beispiel für ein parameterabhängiges lineares Gleichungssystem ist

$$A(p) = \begin{pmatrix} 2 + 3p_1 - p_2 & 3p_1 \\ 1 + p_2 & p_1 + 2p_3 \end{pmatrix}, [p] = ([1, 2], [-1, 0.5], [2, 3])^T \in II\!R^3$$

Einem solchen parameterabhängigen Gleichungssystem ordnet man das sogenannte nichtparametrische Intervall-Gleichungssystem $A([p]) \cdot x = b([p])$ mit $A([p]) := \Diamond\{A(p) \in I\!R^{n\times n} \mid p \in [p]\} \in II\!R^{n\times n}$ und $b([p]) := \Diamond\{b(p) \in I\!R^n \mid p \in [p]\} \in II\!R^n$ zu (das Diamantsymbol bezeichnet den Intervallhüllenoperator). Beispielsweise lautet die dem obigen numerischen Beispiel zugeordnete nichtparametrische Intervallmatrix

$$A([p]) = \begin{pmatrix} 2 + 3[1, 2] - [-1, 0.5] & 3[1, 2] \\ 1 + [-1, 0.5] & [1, 2] + 2[2, 3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4.5, 9] & [3, 6] \\ [0, 1.5] & [5, 8] \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des Systems $A([p]) \cdot x = b([p])$ wird mit

$$\Sigma^g = \Sigma\left(A([p]), b([p])\right) \quad := \quad \{x \in I\!R^n \mid \exists A \in A([p]), b \in b([p]) \text{ mit } A \cdot x = b\}$$

abgekürzt und als nichtparametrische Lösungsmenge bezeichnet.

Aus den Definitionen folgt unmittelbar, dass $\Sigma^p = \Sigma\left(A(p), b(p), [p]\right) \subseteq \Sigma^g = \Sigma\left(A([p]), b([p])\right)$. Jedes Verfahren, das es erlaubt, $\Sigma^g = \Sigma\left(A([p]), b([p])\right)$ zu berechnen, liefert demnach auch eine Einschließung der (eigentlich gesuchten) parametrischen Lösungsmenge. Bekannte Einschließungsverfahren, die z. B. auf der Verwendung des Krawczyk-Operators beruhen, können prinzipiell nur dann zum Erfolg führen, wenn die Intervallmatrix des nichtparametrischen Systems stark regulär ist. Führt also die durch den Übergang zum nichtparametrischen Intervallsystem eintretende Problemvergröberung zu einer nicht stark regulären Intervallmatrix $A([p])$ (siehe [1]), sind solche Verfahren zum Scheitern verurteilt. Im Allgemeinen liefern sie aber auch bei Durchführbarkeit eine deutlich überschätzende Einschließung der Intervallhülle des parameterabhängigen Originalsystems.

[*] e-mail: kraemer@math.uni-wuppertal.de

[**] e-mail: epopova@bio.bas.bg Supported by DFG and the Bulgarian National Science Fund, grant No. IS-03.

2 Etwas Theorie

Das im Folgenden beschriebene iterative Verfahren geht im Wesentlichen auf die Arbeit von Rump [3] zurück. Verbesserungen wurden insbesondere im Hinblick auf die dort verwendete Iterationsmatrix $I - R \cdot A([p])$ angebracht.

Das hier vorgestellte Verfahren wurde unter Verwendung von C-XSC implementiert und getestet. Die Programmquellen sind als Open-Source-Software im Netz verfügbar. Unserer Kenntnis nach handelt es sich weltweit um die erste frei verfügbare Software zur automatischen und verifizierten Einschließung parametrischer Lösungsmengen (bei affin-linearer Parameterabhängigkeit). Die Software erlaubt sowohl die Berechnung einer Außen- als auch einer Inneneinschließung.

Die parameterabhängige Matrix $A(p)$ kann in der Form $A(p) = A^{(0)} + \sum p_\nu A^{(\nu)}$ geschrieben werden. Die rechte Seite wird in der Form $b(p) = b^{(0)} + \sum p_\nu b^{(\nu)}$ dargestellt.

Theorem 2.1 *Mit $R \in I\!R^{n\times n}$, $[U] = [Y] \in I\!I\!R^n$, $\tilde{x} \in I\!R^n$ und $[Z] \in I\!I\!R^n$, $[C(p)] \in I\!I\!R^{n\times n}$ sei*

$$\begin{aligned} [Z] &:= R \cdot (b^{(0)} - A^{(0)}\tilde{x}) + \sum_{\nu=1}^{k} [p_\nu](R \cdot b^{(\nu)} - R \cdot A^{(\nu)} \cdot \tilde{x}), \\ [C(p)] &:= I - R \cdot A^{(0)} - \sum_{\nu=1}^{k} [p_\nu](R \cdot A^{(\nu)}). \end{aligned}$$

Weiter sei $[V] \in I\!I\!R^n$ mittels des Einzelschrittverfahrens

$$1 \le i \le n \;:\; V_i := \{\Diamond([Z] + [C(p)] \cdot [U])\}_i, \quad [U] := (V_1, ..., V_{i-1}, Y_i, ..., Y_n)^\top$$

berechnet. Gilt dann $[V] \subsetneqq [Y]$, so sind R und jede Matrix $A(p), p \in [p]$ regulär und für jedes $p \in [p]$ gilt für die eindeutige Lösung $\widehat{x} = A^{-1}(p)b(p)$ die Inklusion $\widehat{x} \in \tilde{x} + [V]$. Mit $[D] := \Diamond\{[C(p)] \cdot [V]\} \in I\!I\!R^n$ ergibt sich, falls alle Komponenten ungleich der leeren Menge sind, als Inneneinschließung

$$[\tilde{x} + \inf([Z]) + \sup([D]),\ \tilde{x} + \sup([Z]) + \inf([D])] \subseteq \Sigma^p \subseteq [\inf(\Sigma^p),\ \sup(\Sigma^p)]\,.$$

Bemerkungen: Den Beweis des Satzes findet man in [3] und [2]. Sollte im ersten Schritt keine Inklusion zu Stande kommen, so kann das Vorgehen mit $[U] := [Y] := [V]$ iteriert werden. Der Satz kann unmittelbar auf Berechnungen mit Gleitkommazahlen und auf Gleitkommaoperationen mit geeignet eingestellten Rundungsmodi übertragen werden. Im Unterschied zum Vorgehen in Rump wird hier an Stelle der Intervall-Iterationsmatrix $I - R \cdot A([p])$ die Intervallmatrix $[C(p)]$ verwendet. Diese wichtige Modifikation ermöglicht die Berechnung von Einschließungen in Fällen, in denen die zugeordnete Matrix $A([p])$ nicht stark regulär ist (Näheres zum Begriff der starken Regularität findet man in [1]).

3 Numerisches Beispiel

Die dem folgenden sehr einfachen parameterabhängigen linearen Gleichungssystem

$$A(p) = \begin{pmatrix} 3 & p & p \\ p & 3 & p \\ p & p & 3 \end{pmatrix}, b(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [p] = ([0,2])^T \in I\!I\!R^1$$

zugeordnete Intervallmatrix $A([p])$ ist zwar regulär, nicht aber stark regulär (der Spektralradius von $|(\mathrm{mid}A([p]))^{-1}| \cdot \mathrm{rad}A([p])$ ist $\frac{6}{5}$, also größer als 1; mid() bezeichnet die Mittelpunktsmatrix und rad() die Matrix mit den Radien der Intervallkomponenten als Elemente). Trotzdem erlaubt das hier vorgestellte Verfahren z. B. die Berechnung der Außeneinschließung $([-.224, 1.024], [-.697, .4966], [-.696, .4960])^\top$.

References

[1] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations, Cambridge University Press, 1990.
[2] E. D. Popova, W. Krämer, Parametric Fixed-Point Iteration Implemented in C-XSC. Preprint BUW-WRSWT 2003/3, University of Wuppertal, 2003.
[3] S. M. Rump, Verification Methods for Dense and Sparse Systems of Equations. In: Topics in Validated Computations, ed. J. Herzberger, Elsevier Science B. V., pp. 63-135, 1994.