

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C



Mathematik C

Vorlesung WS 07/08

von

Prof. Dr. MANFRED MENDEL

für

die Studiengänge Diplom ET, Master EE, Master IT

Das Skript enthält die Kapitel 1 - 4 und 5 sowie im Anhang eine Korrespondenztabelle zur Laplacetransformation (Stand: 01.10.07). In Abschnitt 4.1 und 4.4 fehlen Skizzen, sie werden noch eingefügt.*

Inhaltsverzeichnis

1	Kurvenintegrale	1
1.1	Kurven in \mathbb{R}^n	1
1.2	Das Kurvenintegral über ein Skalarfeld	5
1.3	Das Kurvenintegral über ein Vektorfeld	8
1.4	Gradientenfelder und Potentiale	13
1.5	Wann ist ein Vektorfeld ein Gradientenfeld	17
1.6	Praktische Bestimmung der Stammfunktion	19
1.7	Zusammenfassung	22
2	Flächenintegrale im \mathbb{R}^3	24
2.1	Flächen im \mathbb{R}^3	24
2.2	Das Flächenintegral eines Skalarfeldes	28
2.3	Das Flächenintegral eines Vektorfeldes	31
2.4	Die Integralsätze	35
2.5	Folgerungen aus den Integralsätzen	42
2.6	Krummlinige Koordinaten	45
2.7	Zusammenfassung	53
3	Funktionentheorie	55
3.1	Einführung	55
3.2	Elementare Funktionen	59
3.3	Holomorphe Funktionen	63
3.4	Isolierte Singularitäten	69
3.5	Integration	72
3.6	Potenzreihen und Taylorentwicklung	83
3.6.1	Potenzreihen im Komplexen	83
3.6.2	Eigenschaften von Potenzreihen	84
3.6.3	Die Taylorreihe einer analytischen Funktion	86
3.7	Laurentreihen und Residuenkalkül	90
3.7.1	Darstellung durch Laurentreihen	90
3.7.2	Klassifikation von Singularitäten	93

3.7.3	Residuenkalkül	94
3.8	Zusammenfassung	100
4	Integraltransformationen	104
4.1	Fourierreihen	104
4.1.1	Trigonometrische Polynome und Reihen	105
4.1.2	Darstellung von Funktionen durch Fourierreihen	107
4.1.3	Darstellung gerader und ungerader Funktionen	114
4.2	Fouriertransformation	117
4.2.1	Einführung	117
4.2.2	Fouriertransformierte und Umkehrformel	118
4.2.3	Eigenschaften der Fouriertransformation	121
4.2.4	Gerade und ungerade Funktionen	127
4.2.5	Rücktransformation mit dem Residuenkalkül	129
4.3	Laplacetransformation	131
4.3.1	Einführung der Laplacetransformation	131
4.3.2	Abbildungsgesetze	137
4.3.3	Methoden der Rücktransformation	147
4.4	Z-Transformation	154
4.4.1	Definition der Z-Transformation	154
4.4.2	Elementare Transformationspaare	156
4.4.3	Formeln zur Rücktransformation	158
4.4.4	Abbildungsgesetze	160
4.5	Zusammenfassung	167
5	Spezielle lineare Differentialgleichungen*	174
5.1	Theoretische Grundlagen über lineare DGLn	174
5.2	Die Eulersche DGL	178
5.3	Die Legendresche DGL	179
5.3.1	Ermittlung der Lösungsmenge	180
5.3.2	Legendre-Polynome*	182
5.3.3	Ein Ansatz aus TE, der zu einer Eulerschen und einer Legendreschen DGL führt	183
5.4	Die Besselsche DGL	184
5.4.1	Ermittlung von Lösungen	185
5.4.2	Einschub: Die Eulersche Gammafunktion	187
5.4.3	Die Lösungsmenge im Fall $m \in \mathbb{N}_0$	188
5.4.4	Ein Ansatz aus TE, der zu einer Besselschen DGL führt	189
5.4.5	Formeln über Besselfunktionen*	190
A	Laplace-Korrespondenzen	192

Kapitel 1

Kurvenintegrale

Neben Riemannintegralen $\int_B f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, wie sie in *Mathematik B*, Kap 7 behandelt wurden, treten in den physikalischen Anwendungen weitere Typen von Integralen auf, mit denen wir uns in den folgenden Kapiteln beschäftigen. Von zentraler Bedeutung ist der Begriff des Kurvenintegrals, mit dessen Hilfe z.B. die Arbeit, die bei Bewegung eines Massenpunktes durch ein Kraftfeld zu leisten ist, dargestellt werden kann. Vor Einführung dieses Integralbegriffs ist zu klären, was unter einer Kurve im \mathbb{R}^n zu verstehen ist.

1.1 Kurven in \mathbb{R}^n

Gegeben sei ein Intervall $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ (mit $\alpha < \beta$). Eine Funktion $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ läßt sich durch ihre Komponentenfunktionen x_i in der Form

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (\text{mit } t \in [\alpha, \beta])$$

darstellen.¹ \mathbf{r} ist in t genau dann differenzierbar, wenn jede Funktion x_i in t differenzierbar ist. Die Ableitung $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T$$

Definition 1.1 Sei $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf dem gegebenen Intervall stetig differenzierbare Funktion mit $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$. Dann wird die Bildmenge $C := \mathbf{r}([\alpha, \beta])$ Kurve in \mathbb{R}^n mit Anfangspunkt $\mathbf{r}(\alpha)$ und Endpunkt $\mathbf{r}(\beta)$ genannt.

¹Wir schreiben künftig einen Spaltenvektor \mathbf{r} aus schreibtechnischen Gründen auch als Zeilenvektor mit Transponiertzeichen T .

Die Funktion \mathbf{r} heißt Parameterdarstellung der Kurve C . Die Kurve C heißt geschlossen, wenn $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$ ist (d.h. Anfangs- und Endpunkt stimmen überein).

Beispiel 1.1 :

- 1) Der Rand eines Kreises im \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius R besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$$

Die Ableitung lautet: $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-R \sin t, R \cos t)^T$.

- 2) Eine Strecke, die die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$ verbindet, wird beschrieben durch die Darstellung

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Die Ableitung ist gegeben durch $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

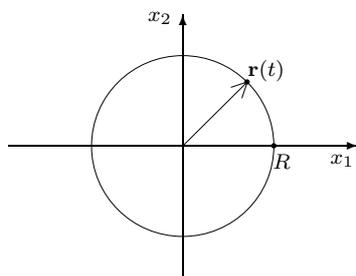
- 3) Für $R > 0$ und $h > 0$ beschreibt die Funktion

$$\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)^T$$

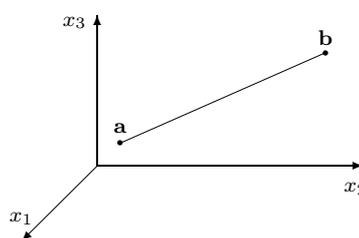
eine Schraubenlinie um die x_3 -Achse. Es ist $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-R \sin t, R \cos t, h)^T$.

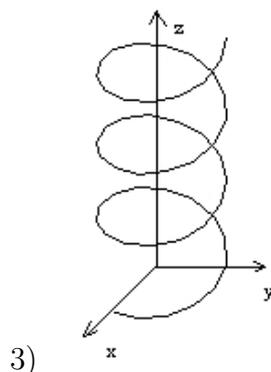
Skizzen dieser Kurven:

1)



2)





Beachte: Eine vorgegebene Kurve C kann durch verschiedene Parameterdarstellungen beschrieben werden. Wir verdeutlichen dies an einem Beispiel.

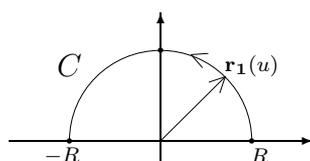
Beispiel 1.2 :

Die Funktion

$$\mathbf{r}_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_1(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$$

beschreibt den unten skizzierten Halbkreis C . Dies trifft aber auch auf die folgenden beiden Funktionen zu:

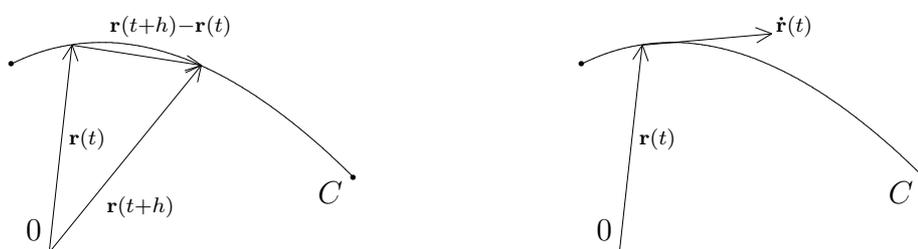
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_2(t) &= (R \cos(\pi t), R \sin(\pi t))^T \\ \mathbf{r}_3 : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_3(t) &= (R \cos(t^2), R \sin(t^2))^T \end{aligned}$$



Kinematische Deutung ($n = 3$) : Ein Massenpunkt bewege sich im Zeitintervall $[\alpha, \beta]$ im \mathbb{R}^3 . Seine Position zur Zeit $t \in [\alpha, \beta]$ werde beschrieben durch den Vektor $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$. Die von dem Punkt beschriebene Bahn ist dann die Kurve C . Der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)]$$

liegt parallel zur Tangente an C im Punkt $\mathbf{r}(t)$.



Verschiedenen Parameterdarstellungen von C entsprechen dann unterschiedliche Durchläufe des Massenpunktes (mit verschiedenen Geschwindigkeiten) durch die Bahn C .

Definition 1.2 Seien $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{r}_* : [\gamma, \delta] \mapsto \mathbb{R}^n$ zwei stetig differenzierbare Funktionen derart, dass ihre Ableitungen nirgends den Wert null annehmen. Ferner sollen die Bildmengen beider Funktionen übereinstimmen, also $\mathbf{r}([\alpha, \beta]) = \mathbf{r}_*([\gamma, \delta])$; es soll aber gelten:

$$\mathbf{r}_*(\gamma) = \mathbf{r}(\beta), \quad \mathbf{r}_*(\delta) = \mathbf{r}(\alpha)$$

Dann wird \mathbf{r}_* eine Orientierungsumkehrung von \mathbf{r} genannt. Eine Kurve, die durch Orientierungsumkehrung aus C hervorgeht, bezeichnen wir mit C_* .

Bei einer Orientierungsumkehrung liegt also (mengenmäßig) die gleiche Kurve vor, der „Zeiger“ durchläuft jedoch die Kurve in umgekehrter Richtung.

Beispiel 1.3 :

Die Funktion

$$\mathbf{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$$

beschreibt den unten skizzierten Halbkreis C . Die Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}_*(u) = (R \cos(\pi - u), R \sin(\pi - u))^T, \quad 0 \leq u \leq \pi$$

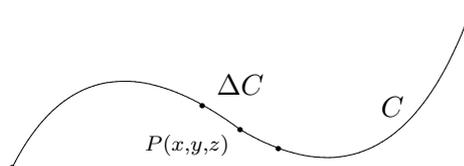
stellt eine Orientierungsumkehrung von C dar. Wie wir bereits angemerkt haben, verwenden wir dafür das Symbol C_* .



1.2 Das Kurvenintegral über ein Skalarfeld

Zur Motivation des Kurvenintegrals über ein Skalarfeld betrachten wir eine Kurve C , die mit Masse belegt sei (man denke etwa an einen dünnen Draht). Wir nehmen an, in jedem Punkt $P(x, y, z) \in C$ sei eine stetige Massendichte $\varphi(x, y, z)$ vorhanden und bekannt.

Eine Massendichte entlang einer Linie ist dabei wie folgt definiert: ΔC sei ein kleines Teilstück von C , das den Punkt $P(x, y, z)$ enthält. Ferner sei Δm die Masse auf ΔC und Δs die Länge von ΔC .



Der Quotient $\Delta m / \Delta s$ stellt die mittlere Dichte der Masse auf ΔC dar. Lässt man ΔC auf den Punkt $P(x, y, z)$ zusammenschrumpfen, so nennt man den Grenzwert des Quotienten $\Delta m / \Delta s$ (für $\Delta s \rightarrow 0$) die Massendichte im Punkt $P(x, y, z)$.

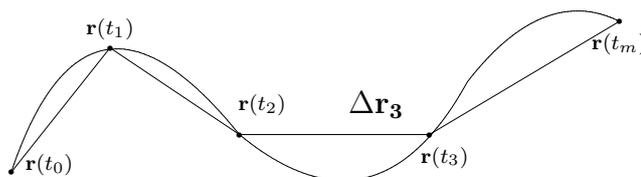
Um aus der Massendichte $\varphi(x, y, z)$ die Gesamtmasse M wiederzugewinnen, geben wir zunächst einen Näherungswert für M an. Dabei legen wir für C die Darstellung $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zugrunde. Wir gehen von einer Zerlegung des Intervalls $[\alpha, \beta]$, also

$$Z_m : \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = \beta$$

aus. Die Bildpunkte $\mathbf{r}_i := \mathbf{r}(t_i)$ bilden eine „Zerlegung“ der Kurve C . Jeder Abstand $\|\Delta \mathbf{r}_i\| := \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|$ von je zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten ist ein Näherungswert für die Länge Δs_i des Kurvenstücks zwischen diesen Teilpunkten. Damit ist $\varphi(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\Delta \mathbf{r}_i\|$ ein Näherungswert der Masse des Kurvenstücks zwischen diesen Teilpunkten und damit

$$S(\varphi, Z_m) := \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\Delta \mathbf{r}_i\| \quad (1.1)$$

ein Näherungswert für die Masse M von C .

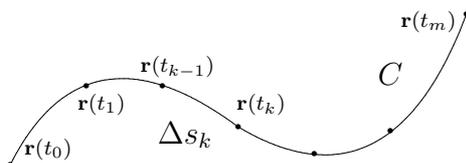


Nun gilt für kleine Δt_i folgende Näherung (Taylorformel 1. Ordnung):

$$\Delta \mathbf{r}_i := \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \approx \dot{\mathbf{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i$$

so dass es plausibel ist, den Wert (1.1) durch folgenden Näherungswert zu ersetzen:

$$S(\varphi, Z_m) := \sum_{i=1}^m \varphi(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\dot{\mathbf{r}}(t_{i-1})\| \Delta t_i \quad (1.2)$$



Wir führen nur folgenden Grenzprozeß durch: Die vorliegende Zerlegung Z_m wird durch Hinzunahme weiterer Teilpunkte verfeinert. Auf diese Weise erhalten wir eine Zerlegungsfolge (Z_m) ; die Verfeinerung soll so vorgenommen werden, dass $\max\{\Delta t_i \mid i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0$ (für $m \rightarrow \infty$) geht. Die Summe (1.2) ist eine Riemannsche Näherungssumme für die Funktion $t \mapsto \varphi(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$, die unter den angegebenen Voraussetzungen gegen das folgende Riemannintegral konvergiert:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt$$

Dieses Integral stellt in diesem Fall die Gesamtmasse M von C dar. Man kann zeigen, dass dieses Integral nur von der Kurve C (und natürlich von φ), nicht aber von der Darstellung \mathbf{r} , die diese Kurve beschreibt, abhängt.

Definition 1.3 C sei eine Kurve, dargestellt durch $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, und φ sei ein Skalarfeld, das entlang C stetig sei. Dann heißt

$$\int_C \varphi ds := \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \quad (1.3)$$

Kurvenintegral des Skalarfeldes φ längs C .

Beispiel 1.4 :

Die Schraubenlinie C , definiert durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ 4 \sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi \quad (1.4)$$

sei mit der Massendichte $\varphi(x, y, z) = c(1 + z)$ belegt. Wegen $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{16 + 9}$ erhält man die Gesamtmasse M dann wie folgt:

$$M = \int_C \varphi \, ds = \int_0^{4\pi} c(1 + 3t)\sqrt{16 + 9} \, dt = 5c \left(t + \frac{3}{2}t^2 \right) \Big|_0^{4\pi} = 20\pi c(1 + 6\pi)$$

Im folgenden werden einige **Anwendungsformeln** des Integraltyps (1.3) vorgestellt.

- 1) Ist $\varphi \equiv 1$ („Einsfunktion“) auf der Kurve C , so geht aus (1.1) hervor, dass das Kurvenintegral

$$\int_C 1 \, ds := \int_\alpha^\beta \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \, dt$$

die Länge von C ist, die wir mit $L(C)$ bezeichnen.

- 2) ϱ sei eine stetige Massendichte für die Kurve C . Dann sind die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des **Schwerpunktes** von C definiert durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \varrho(x, y, z) \, ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \varrho(x, y, z) \, ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \varrho(x, y, z) \, ds$$

- 3) ϱ habe die gleiche Bedeutung wie in 2). g sei eine Gerade in \mathbb{R}^3 und $\delta(x, y, z)$ sei der Abstand des Punktes $P(x, y, z) \in C$ zu g . Dann heißt

$$I_g = \int_C \delta(x, y, z)^2 \varrho(x, y, z) \, ds \quad (1.5)$$

Trägheitsmoment von C bezüglich der Achse g . Ist g speziell die z -Achse, so besitzt (1.5) wegen $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Form:

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) \, ds \quad (1.6)$$

Beispiel 1.5 :

- Wir berechnen die Länge der in (1.4) definierten Schraubenlinie:

$$L(C) = \int_C 1 \, ds = \int_0^{4\pi} \sqrt{16 + 9} \, dt = 5(t) \Big|_0^{4\pi} = 20\pi$$

- Es wird das Trägheitsmoment derselben Kurve in Bezug auf die z -Achse bestimmt, wenn die Kurve homogen mit der Dichte $\rho = 1$ belegt ist:

$$\int_C (x^2 + y^2) \, ds = \int_0^{4\pi} (4^2 \cos^2 t + 4^2 \sin^2 t) \sqrt{16 + 9} \, dt = 320\pi$$

1.3 Das Kurvenintegral über ein Vektorfeld

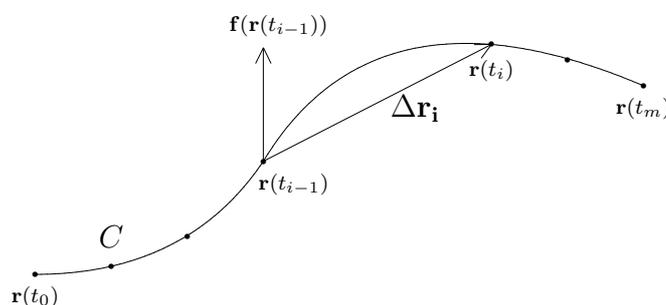
Zur Motivation betrachten wir ein Kraftfeld \mathbf{f} im \mathbb{R}^3 , d.h. jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei ein Kraftvektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zugeordnet. Ein Massenpunkt P möge sich unter der Wirkung dieses Kraftfeldes auf der durch $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dargestellten Kurve C bewegen. Sind $\mathbf{r}(t_{i-1})$ und $\mathbf{r}(t_i)$ zwei nahe beieinander liegende Punkte auf C , so leistet, wie die Mechanik lehrt, das Kraftfeld \mathbf{f} bei Bewegung des Punktes P von $\mathbf{r}(t_{i-1})$ nach $\mathbf{r}(t_i)$ eine Arbeit, die näherungsweise durch $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \cdot (\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}))$ gegeben wird (s. Skizze unten). Die gesamte Arbeit, die das Kraftfeld \mathbf{f} bei der Bewegung von P längs C leistet, wird dann angenähert gleich

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{f}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \cdot (\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})) = \sum_{k=1}^m \mathbf{f}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (1.7)$$

sein, wenn Z_m eine Zerlegung $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ von $[\alpha, \beta]$ ist. Um einen exakten Begriff der Arbeit zu gewinnen, wird man nun in bekannter Weise vorgehen: Man wird die Zerlegung Z_m unbegrenzt verfeinern. Wie oben ausgeführt, können wir in (1.7) bei der Grenzwertbildung $\Delta \mathbf{r}_i$ durch $\dot{\mathbf{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i$ ersetzen, so dass wir an Stelle von (1.7) die Summe

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{f}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t_{i-1}) \Delta t_i \quad (1.8)$$

mit $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ erhalten. (1.8) ist eine Riemannsche Summe der Funktion $t \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$ von $[\alpha, \beta]$ nach \mathbb{R} . Diese Funktion ist stetig, wenn wir \mathbf{f} als stetig entlang C voraussetzen. Der Grenzwert dieser Summe ist daher gegeben durch $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt$. Er stellt exakt die von \mathbf{f} längs C geleistete Arbeit dar.



Man kann auch hier zeigen, dass das obige Integral nur von der Kurve C (und von \mathbf{f}), nicht aber von der Parameterdarstellung $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$ von C abhängt.

Definition 1.4 C sei eine durch die Funktion $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dargestellte Kurve. Das Vektorfeld $\mathbf{f} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei auf C stetig. Man nennt dann

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \quad (1.9)$$

das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{f} längs C . (Der „Punkt“ zeigt an, daß das Skalarprodukt zu bilden ist.)

Bemerkung: Folgendes **Schema** beschreibt die **Berechnung** des Kurvenintegrals (1.9) (für $n = 3$):

- Parameterisierung von C , d.h. man gibt für C eine Parameterdarstellung $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ mit $t \in [\alpha, \beta]$ an.
- Berechnung des Kurvenelements: $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t) dt = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T dt$
- Berechnung des Integrals gemäß (1.9):

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}(t)) \\ f_2(\mathbf{r}(t)) \\ f_3(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt$$

Beispiel 1.6 :

Es ist das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xz \end{pmatrix} \quad (\text{mit } x^2 + y^2 \neq 0)$$

längs eines zur xy -Ebene parallelen Kreises C mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, h)$ zu berechnen.

Parameterdarstellung von C und Angabe des Kurvenelements:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

Berechnung nach der Formel (1.9):

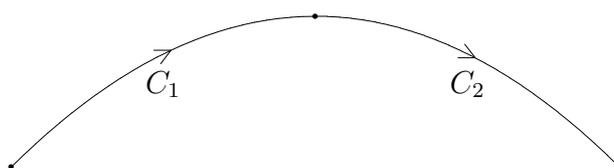
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{x(t)^2 + y(t)^2} \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \\ x(t)z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \right] dt \\ &= \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ Rh \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Bewegt sich ein Punkt P unter der Wirkung des Kraftfeldes \mathbf{f} entlang C , so entspricht die geleistete Arbeit im vorliegenden Fall dem Wert 2π .

Ist $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Darstellung der Kurve C und ist γ ein innerer Punkt des Intervalls $[\alpha, \beta]$, so werden durch

$$C_1 := \mathbf{r}([\alpha, \gamma]) \quad C_2 := \mathbf{r}([\gamma, \beta])$$

zwei Teilstücke von C definiert, die aneinander gehängt gerade C ergeben. Wir verwenden dafür folgende Notation:



$$C = C_1 \oplus C_2$$

Ferner sei daran erinnert, dass C_* eine Kurve bezeichnen, die durch Orientierungsumkehrung aus der Kurve C entsteht.

Satz 1.1 (Grundlegende Eigenschaften des Kurvenintegrals)

\mathbf{f} und \mathbf{g} seien entlang der Kurve C stetige Vektorfelder und k sei aus \mathbb{R} . Dann gelten die folgenden Aussagen:

$$a) \int_C (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_C k\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = k \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

$$b) \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{für } C = C_1 \oplus C_2)$$

$$c) \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

$$d) \left| \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right| \leq \left(\underbrace{\max_{\mathbf{x} \in C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}_{L} \right) L \quad (L \text{ Länge von } C)$$

BEWEIS: Die Aussagen lassen sich recht einfach mit Formel (1.9) begründen, wobei bekannte Eigenschaften des eindimensionalen Integrals benutzt werden:

$$\begin{aligned} a) \int_C (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{r}(t))) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{g}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\ &= \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Die zweite Formel in a) beweist man analog.

$$\begin{aligned} b) \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\ &= \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

c) Die Kurve C sei dargestellt durch die stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$. Wir wählen nun eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [\alpha, \beta]$ mit $\varphi(\alpha) = \beta, \varphi(\beta) = \alpha$. Dann ist $\mathbf{r} \circ \varphi$ eine Parameterdarstellung von C_* . Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{C_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{f}(\mathbf{r}(\varphi(t)))) \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{r}(\varphi(t))) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{f}(\mathbf{r}(\varphi(t)))) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} (\mathbf{f}(\mathbf{r}(u))) \cdot \dot{\mathbf{r}}(u) du \quad (\text{mit } u := \varphi(t)) \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{f}(\mathbf{r}(u))) \cdot \dot{\mathbf{r}}(u) du = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

$$d) \left| \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\| \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \\
&\leq \left(\max_{x \in C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \right) \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \\
&= \left(\max_{x \in C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \right) L
\end{aligned}$$

Dabei ist bei der vorletzten Abschätzung die Cauchy-Schwarze'sche Ungleichung eingegangen. \square

Im Hinblick auf die Erfordernisse der Physik ist es geboten, den **Kurvenbegriff etwas allgemeiner** zu fassen. Wir wollen auch von einer Kurve sprechen, wenn endliche viele Kurven im bisherigen Sinne aneinandergelängt werden. Was darunter zu verstehen ist, wird durch folgende Erklärung festgelegt.

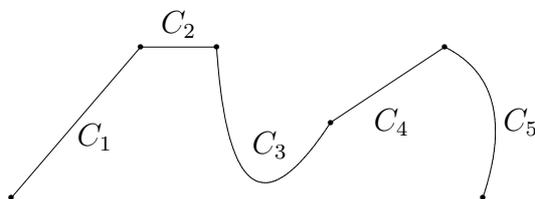
Definition 1.5 a) Gegeben seien p Kurven (Kurvenstücke) C_i in den Parameterdarstellungen $\mathbf{r}_i : [\alpha_i, \beta_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, p$), so daß $\mathbf{r}_i(\beta_i) = \mathbf{r}_{i+1}(\alpha_{i+1})$ (für $1 \leq i \leq p-1$) ist. Dann wird auch

$$C = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_p \quad (1.10)$$

Kurve in \mathbb{R}^n genannt, d.h. C entsteht durch Aneinanderhängen von endlich vielen Kurven C_i (im bisherigen Sinne) (s. Skizze).

b) Das Kurvenintegral von \mathbf{f} entlang der Kurve C gemäß (1.10) berechnet sich nach der Formel:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_p} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$



$$\text{Kurve } C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5$$

Beispiel 1.7 :

Zu berechnen ist das Kurvenintegral des Vektorfeldes

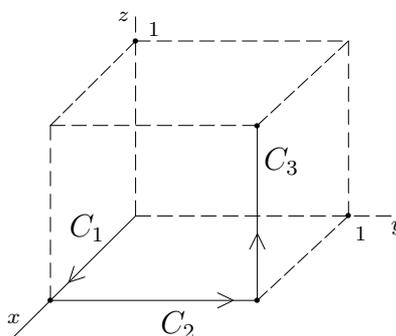
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x^2y)\mathbf{e}_1 + (x+y)\mathbf{e}_2 + (xyz)\mathbf{e}_3$$

entlang des Polygonzuges C , der die Punkte $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ verbindet (s. Skizze). C setzt sich aus drei Kurvenstücken C_i zusammen, deren Parameterdarstellungen im folgenden angegeben sind:

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t, 0, 0)^T, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (1, t, 0)^T, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (1, 1, t)^T, \quad 0 \leq t \leq 1$$



$$J_1 = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

$$J_2 = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1+t) dt = \frac{3}{2}$$

$$J_3 = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}_3(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = J_1 + J_2 + J_3 = 2$$

1.4 Gradientenfelder und Potentiale

Zur Einführung betrachten ein einfaches Beispiel, das dem Leser aus der Elektrotechnik bekannt sein wird. Das elektrische Feld einer Punktladung von Q (Coulomb), die im Koordinatenursprung platziert ist, ist gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{für } r \neq 0$$

Wir setzen zur Abkürzung $k := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$. Die folgende Beziehung haben wir bereits in Mathematik B (s. Beispiel 6.7, 2)) verifiziert:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.11)$$

Setzt man $U(\mathbf{r}) := k \frac{1}{r}$ ($r \neq 0$), so kann man aus (1.11) ablesen, dass gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) \quad (\text{für } r \neq 0)$$

Das Vektorfeld \mathbf{E} läßt sich im vorliegenden Fall als Gradient des Skalarfeldes $-U$ darstellen.

Definition 1.6 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, G offen. Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein Gradientenfeld, wenn es ein stetig differenzierbares Skalarfeld φ auf G gibt, so daß

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}) \quad (\text{für alle } \mathbf{x} \in G)$$

gilt. φ wird dann eine Stammfunktion und $U = -\varphi$ ein Potential von \mathbf{f} auf G genannt. (Man sagt dann auch, das Feld \mathbf{f} besitzt ein Potential U auf G .)

Eine andere Bezeichnung für Gradientenfeld ist Potentialfeld oder auch konservatives Feld.

Ist \mathbf{f} ein Gradientenfeld auf G , so ist mit φ auch $\varphi + c$ (c eine beliebige reelle Konstante) eine Stammfunktion von \mathbf{f} auf G . Man macht sich klar, daß man auf diese Weise dann alle Stammfunktionen von \mathbf{f} erhält.

Eine offene Teilmenge G von \mathbb{R}^n , die zusammenhängend ist, wird **Gebiet** genannt. Zusammenhängend bedeutet, daß es zu je zwei Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ eine in G verlaufende Kurve C gibt, die \mathbf{a} mit \mathbf{b} verbindet. Besitzt \mathbf{f} auf G ein Potential U (und ist ein solches bekannt), so bekommt man den Wert des Kurvenintegrals von \mathbf{f} als sog. Potentialdifferenz:

Satz 1.2 (Das Kurvenintegral als Potentialdifferenz)

G sei ein Gebiet von \mathbb{R}^n . Das stetige Vektorfeld $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein Gradientenfeld und φ sei eine Stammfunktion von \mathbf{f} auf G . Für je zwei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ und jede Kurve C in G , die \mathbf{a} mit \mathbf{b} verbindet, gilt:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) \quad (= U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{b}))$$

BEWEIS: Es genügt, eine Kurve C , die durch eine stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ beschrieben wird, zu betrachten. (Der Fall mit dem verallgemeinerten Kurvenbegriff läßt sich daraus leicht ableiten.) Es gilt: $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{a}$, $\mathbf{r}(\beta) = \mathbf{b}$.

Im der folgenden Beziehung wenden wir die Kettenregel auf folgende Weise an (s. Math B, Satz 6.9):

$$\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{r}(t)) = (\text{grad } \varphi(\mathbf{r}(t)))^T \dot{\mathbf{r}}(t)$$

Wegen $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$ ist dann

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} (\text{grad } \varphi(\mathbf{r}(t)))^T \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{r}(t)) dt \\ &= \varphi(\mathbf{r}(\beta)) - \varphi(\mathbf{r}(\alpha)) = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

□

Ist \mathbf{f} ein stetiges Vektorfeld auf dem Gebiet G und hat für je zwei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ das Integral $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ längs jeder ganz in G verlaufenden Kurve C mit dem Anfangspunkt \mathbf{a} und dem Endpunkt \mathbf{b} immer denselben Wert, so wird das Integral über \mathbf{f} **wegunabhängig** genannt. Da es in diesem Fall nicht von C (sondern nur von \mathbf{f} und \mathbf{a}, \mathbf{b}) abhängt, schreibt man es auch in der Form

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Der letzte Satz lehrt, daß das Kurvenintegral über ein stetiges Gradientenfeld in einem Gebiet G wegunabhängig ist. Der folgende Satz zeigt, daß diese Eigenschaft die stetigen Gradientenfelder vollständig charakterisiert.

Satz 1.3 (Charakterisierung von Gradientenfeldern)

$G \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet. Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld.
- Für eine beliebige Kurve C in G ist das Integral $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ wegunabhängig.
- Für jede geschlossene Kurve Γ in G gilt:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

BEWEIS: a) \Rightarrow b): Nach Voraussetzung a) besitzt \mathbf{f} ein Potenzial U auf G , somit kann das Kurvenintegral nach Satz 1.2 als Potentialdifferenz $U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{b})$ dargestellt werden, es ist also von der Verbindungskurve C unabhängig.

b) \Rightarrow c): Γ sei eine geschlossene Kurve in G . Wir zerlegen Γ in 2 Kurven $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ (s. Skizze unten). Γ_{2*} gehe aus Γ_2 durch Änderung der Orientierung hervor. Nun gilt:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_{2*}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil Γ_1 und Γ_{2*} Kurven sind, die die gleichen Punkte verbinden; nach Voraussetzung b) sind die Werte dieser beiden Integrale gleich.

c) \Rightarrow b): Seien C_1 und C_2 zwei Kurven, die die Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} verbinden. Sei $C = C_1 \oplus C_{2*}$. Nach Voraussetzung c) gilt, dass $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ist. Dies ist (s. oben) äquivalent zu $\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

b) \Rightarrow a): Für $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in G$ (\mathbf{x}_0 fest) wird φ definiert durch

$$\varphi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Da das Integral über \mathbf{f} wegunabhängig ist, ist diese Definition sinnvoll. Zu zeigen ist: $\text{grad } \varphi = \mathbf{f}$.

Für kleine $h \in \mathbb{R}$ liegt die gesamte Strecke, die \mathbf{x} mit $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1$ verbindet, in G (s. Skizze). Diese Strecke wird durch die Darstellung $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t h \mathbf{e}_1$, $0 \leq t \leq 1$, beschrieben. Wegen $\dot{\mathbf{r}}(t) = h\mathbf{e}_1$ gilt nun:

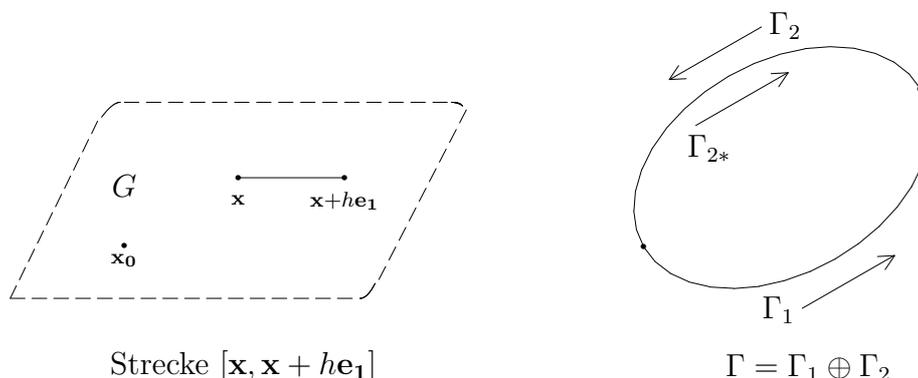
$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{x} + t h \mathbf{e}_1) \cdot h\mathbf{e}_1 dt \\ &= \int_0^1 f_1(\mathbf{x} + t h \mathbf{e}_1) h dt = f_1(\mathbf{x} + \tilde{t} h \mathbf{e}_1) h \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt nach Math A, Satz 3.6 (Mittelwertsatz). Dabei ist $\tilde{t} \in [0, 1]$. Aus der Beziehung

$$\frac{1}{h} [\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - \varphi(\mathbf{x})] = f_1(\mathbf{x} + \tilde{t} h \mathbf{e}_1)$$

erhält man für $h \rightarrow 0$: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$. Ebenso begründet man für beliebigen

Index i : $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$, womit $\text{grad } \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ gezeigt ist. \square



Beispiel 1.8 :

- 1) Das oben betrachtete elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3}\mathbf{r}$, das auf $G := \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert ist, besitzt das Potential $U(\mathbf{r}) = \frac{k}{r}$ auf G . Ist C eine Kurve in G mit Anfangspunkt \mathbf{a} und Endpunkten \mathbf{b} , so gilt mit $a := \|\mathbf{a}\|, b := \|\mathbf{b}\|$:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{b}) = k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

- 2) Sei $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$ (\mathbb{R}^3 ohne z -Achse). Das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)^T$$

integrieren wir über die geschlossene Kurve C , definiert durch $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, h)^T, 0 \leq t \leq 2\pi$ (Rand eines Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0, h)$ und Radius R). Man beachte, dass $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0)^T$ ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt \\ &= \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} (-R \sin t, R \cos t, 0) \cdot (-R \sin t, R \cos t, 0) dt = 2\pi \end{aligned}$$

Damit kann \mathbf{f} nach Satz 1.3 kein Gradientenfeld sein.

1.5 Wann ist ein Vektorfeld ein Gradientenfeld

Eine Antwort auf diese Frage wurde schon im letzten Abschnitt gegeben: Das stetige Vektorfeld auf dem Gebiet G ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn das Kurvenintegral über \mathbf{f} **wegunabhängig** ist. Die Überprüfung dieses Kriteriums wird aber im allgemeinen kaum durchführbar sein. Es gibt aber ein sehr praktisches „Differentiationskriterium“, das wir im folgenden vorstellen. Zunächst geben wir eine einfache notwendige Bedingung an.

Satz 1.4 (Notwendige Bedingung)

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld \mathbf{f} auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gradientenfeld. Dann ist die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} symmetrisch, d.h. für alle $\mathbf{x} \in G$ gilt:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^T \quad \text{oder äquivalent:} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (i, k = 1, \dots, n) \quad (1.12)$$

Die Bedingungen (1.12) werden **Integrabilitätsbedingungen** genannt.

BEWEIS: Wir setzen also \mathbf{f} als Gradientenfeld voraus und bezeichnen mit φ eine Stammfunktion von \mathbf{f} auf G . Also gilt:

$$\mathbf{f} = \text{grad } \varphi \quad \text{oder ausführlich} \quad f_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

Nach dem Satz von Schwarz folgt daraus:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

□

Wir formulieren die Integrabilitätsbedingung (1.12) explizit für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$:

$$\begin{aligned} n = 2) \quad & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ n = 3) \quad & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Im Fall $n = 3$ sind nach Definition der Rotation diese letzten drei Gleichungen äquivalent mit $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ (auf G).

Die **Integrabilitätsbedingung** (1.12) allein ist aber keineswegs hinreichend dafür, daß \mathbf{f} auch ein Gradientenfeld ist. Folgendes Beispiel ist ein Beleg dafür:

Beispiel 1.9 :

Sei $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$. Das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)^T$$

ist kein Gradientenfeld, wie wir im vorhergehenden Beispiel gezeigt haben. Andererseits wissen wir aus Mathematik B (s. Beispiel 6.18,2) und S.147), daß $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ auf G ist.

Die Bedingung (1.12) wird erst dann hinreichend, wenn eine zusätzliche Voraussetzung über die „geometrische Gestalt“ des Definitionsbereichs G von \mathbf{f} hinzukommt.

Definition 1.7 Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve C in G so auf einen Punkt zusammengesogen werden kann, dass die aus C hervorgehenden deformierten Kurven keinen Punkt treffen, der nicht zu G gehört.

Wir erläutern den Begriff an Beispielen mit G aus dem \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 :

- a) Einfach zusammenhängend in \mathbb{R}^2 sind: $G = \mathbb{R}^2$ (gesamte Ebene),
 $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ (Kreisgebiet), $G = \{(x, y) \mid y > 0\}$ (Halbebene).
 Nicht einfach zusammenhängend in \mathbb{R}^2 sind Gebiete mit „Löchern“, z.B.
 $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ oder ein Kreisring:
 $G = \{(x, y) \mid a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$.
- b) Einfach zusammenhängend in \mathbb{R}^3 sind:
 $G = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$.
 Nicht einfach zusammenhängend in \mathbb{R}^3 sind Gebiete mit Durchbohrungen,
 z.B. $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 0\}$ (\mathbb{R}^3 ohne z -Achse), oder
 ein Hohlzylinder: $G = \{(x, y, z) \mid a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$.

Satz 1.5 (Charakterisierung der Gradientenfelder)

Das Vektorfeld \mathbf{f} sei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G stetig differenzierbar. Unter diesen Voraussetzungen ist \mathbf{f} genau dann ein Gradientenfeld auf G , wenn die Integrabilitätsbedingung (1.12) auf G erfüllt ist.

Den noch ausstehenden Teil des Beweises, daß nämlich die Bedingung (1.12) unter den angegebenen Voraussetzungen hinreichend ist für das Vorliegen eines Gradientenfeldes, wollen wir hier nicht führen.

1.6 Praktische Bestimmung der Stammfunktion

Wir illustrieren die Methode für den praktisch wichtigen Fall $n = 3$. G sei also ein Gebiet in \mathbb{R}^3 und $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar auf G . Nur wenn die Bedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0 \quad (\text{auf } G) \quad (\star)$$

erfüllt ist, kann \mathbf{f} auf G überhaupt eine Stammfunktion φ besitzen. Wir machen dann mit einem unbekanntem Skalarfeld φ den folgenden Ansatz:

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{f} \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3$$

- 1) Die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1$ wird unbestimmt nach x integriert (wobei y, z wie Konstante behandelt werden):

$$\varphi(x, y, z) = \int f_1(x, y, z) dx + c(y, z) \quad (1.13)$$

mit einer willkürlichen „Integrationskonstanten“ (d.h. einer Größe $c(y, z)$, die noch von y, z abhängt).

- 2) Mit der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2$ verfahren wir ähnlich. Sie wird unbestimmt nach y integriert (wobei x, z wie Konstante behandelt werden):

$$\varphi(x, y, z) = \int f_2(x, y, z) dy + \tilde{c}(x, z) \quad (1.14)$$

- 3) Ebenso wird $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3$ unbestimmt nach z integriert (wobei x, y wie Konstante behandelt werden):

$$\varphi(x, y, z) = \int f_3(x, y, z) dz + \bar{c}(x, y) \quad (1.15)$$

Wir haben damit drei Darstellungen für φ , wobei jede von ihnen einen unbekanntem Term enthält. Durch Vergleich macht man sich klar, dass $c(y, z)$ in (1.13) nur aus jenen Termen in (1.14), die von y und z und dann nur aus jenen Termen in (1.15), die von z abhängen, bestehen kann. $c(y, z)$ in (1.13) ist also durch diese Terme zu ersetzen.

Ist G einfach zusammenhängend, so ist das so ermittelte φ sicher eine Stammfunktion von \mathbf{f} .

Andernfalls ist zu prüfen, ob die konstruierte Funktion φ auf ganz G stetig differenzierbar ist und die Gleichung $\text{grad } \varphi = \mathbf{f}$ erfüllt.

Beispiel 1.10 :

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x + z, -y - z, x - y)^T$$

ist auf $G := \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und erfüllt dort - wie man leicht nachrechnet - die Integrabilitätsbedingung $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Wir machen den folgenden Ansatz:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1 := x + z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2 := -y - z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 := x - y$$

- 1) Aus $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x + z$ folgt: $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xz + c(y, z)$.
- 2) Aus $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -y - z$ folgt: $\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2}y^2 - yz + \tilde{c}(x, z)$.
- 3) Aus $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x - y$ folgt: $\varphi(x, y, z) = xz - yz + \bar{c}(x, y)$.

In der ersten Gleichung ist also $c(y, z)$ durch $-\frac{1}{2}y^2 - yz + c$ zu ersetzen. Damit ergibt sich folgende Stammfunktion:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xz - \frac{1}{2}y^2 - yz + c$$

Ergänzung*: Die oben beschriebene Methode wird häufig auch (mathematischer) wie folgt durchgeführt:

- 1) Die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1$ wird unbestimmt nach x integriert (wobei y, z wie Konstante behandelt werden):

$$\varphi(x, y, z) = \int f_1(x, y, z) dx + c(y, z) \quad (1.16)$$

mit einer „Integrationskonstanten“ $c(y, z)$.

- 2) Die Gleichung (1.16) wird partiell nach y abgeleitet:

$$\begin{aligned} \int f_{1y}(x, y, z) dx + c_y(y, z) &= \varphi_y = f_2 \\ \Rightarrow c_y(y, z) &= f_2 - \int f_{1y}(x, y, z) dx =: g(y, z) \end{aligned}$$

Unbestimmte Integration nach y ergibt mit einer willkürlichen „Integrationskonstanten“ $h(z)$:

$$c(y, z) = \int g(y, z) dy + h(z) \quad (1.17)$$

- 3) Wir setzen (1.17) in (1.16) ein und erhalten so die Beziehung

$$\varphi(x, y, z) = \int f_1(x, y, z) dx + \int g(y, z) dy + h(z) \quad (1.18)$$

in der noch $h(z)$ zu bestimmen ist. Dies wird erreicht, indem wir die Gleichung (1.18) partiell nach z ableiten und $\varphi_z = f_3$ einsetzen. Durch unbestimmtes Integrieren nach z gewinnt man schließlich $h(z)$.

1.7 Zusammenfassung

Kurvenintegrale

Eine KURVE C IM RAUM wird durch eine Parameterdarstellung der Form angegeben:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{mit } t \in [\alpha, \beta])$$

Der Tangentenvektor ist gegeben durch $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T$.

Analog werden KURVEN IN DER EBENE durch zwei-dimensionale Vektoren dargestellt.

Häufig auftretende BEISPIELE für Parametrisierung: 1) Strecken, 2) Polygonzüge, 3) Kreise, 4) Schraubenlinien, 5) Kurven, die Graph einer Funktion sind (nur in \mathbb{R}^2).

DAS KURVENINTEGRAL EINES SKALARFELDES φ längs einer Kurve C ist definiert durch

$$\begin{aligned} \int_C \varphi ds &:= \int_\alpha^\beta \varphi(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \\ &:= \int_\alpha^\beta \varphi(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

Das Integral ist hier für $n = 3$ aufgeschrieben; es lautet analog für den Fall $n = 2$.

ANWENDUNGSFORMELN: ρ sei eine Dichtefunktion für eine Massenverteilung auf C .

1. Länge von C : $L = \int_C 1 ds$.
2. Gesamtmasse M : $M = \int_C \rho(x, y, z) ds$.
3. Schwerpunktkoordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$: $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds$.
Analog für \bar{y}, \bar{z} .
4. Trägheitsmoment T_z bzgl. z -Achse: $T_z = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$.

DAS KURVENINTEGRAL EINES VEKTORFELDES \mathbf{f} längs einer Kurve C (ARBEITSINTEGRAL) ist definiert durch

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &:= \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}(t)) \\ f_2(\mathbf{r}(t)) \\ f_3(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Das Integral ist hier für $n = 3$ aufgeschrieben; es lautet analog für den Fall $n = 2$.

GRADIENTENFELD: Eine Vektorfeld \mathbf{f} , stetig auf einem Gebiet G des \mathbb{R}^n , wird Gradientenfeld auf G genannt, wenn es Gradient eines auf G stetig differenzierbaren Skalarfeldes φ ist, also:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{x} \in G)$$

Dann wird φ eine Stammfunktion von \mathbf{f} und $U := -\varphi$ ein Potenzial von \mathbf{f} auf G genannt.

Ist \mathbf{f} ein Gradientenfeld und φ eine Stammfunktion von \mathbf{f} auf G , dann gilt für jede Kurve C in G mit Anfangspunkt \mathbf{a} , Endpunkt \mathbf{b} :

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) \quad (= U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{b}))$$

Es gilt folgende CHARAKTERISIERUNG von Gradientenfeldern:

$G \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet. Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld.
- b) Für eine beliebige Kurve C in G ist das Integral $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ wegunabhängig.
- c) Für jede geschlossene Kurve Γ in G gilt:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Eine weitere CHARAKTERISIERUNG von Gradientenfeldern erhält man mittels der sog. Integrabilitätsbedingungen:

1. Ist \mathbf{f} ein Gradientenfeld auf G , so ist die Jacobi-Matrix $J_f(\mathbf{x})$ symmetrisch für alle $x \in G$.
2. Ist $J_f(\mathbf{x})$ symmetrisch für alle $x \in G$ und ist G einfach zusammenhängend, so ist \mathbf{f} ein Gradientenfeld auf G .

Für 3-dimensionale Vektorfelder gilt: $J_f(\mathbf{x})$ symmetrisch \iff rot $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Kapitel 2

Flächenintegrale im \mathbb{R}^3

In diesem Kapitel werden Integrale über **Flächen** vorgestellt, die Teilmengen des Raumes \mathbb{R}^3 sind. Zunächst geht es darum zu klären, wie solche Flächen im Raum mathematisch dargestellt werden können. Es werden dann Flächenintegrale über Skalarfelder und solche über Vektorfelder eingeführt, wobei letztere von größerer Bedeutung sind. Schließlich wird auf die Integralsätze von Gauß und Stokes eingegangen.

2.1 Flächen im \mathbb{R}^3

In diesem Abschnitt sei B eine beschränkte, abgeschlossene Fläche in \mathbb{R}^2 , deren Rand ∂B eine Kurve (i.S. von Definition 1.5) sei. Eine Funktion $\mathbf{r} : B \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ können wir in der Komponentendarstellung

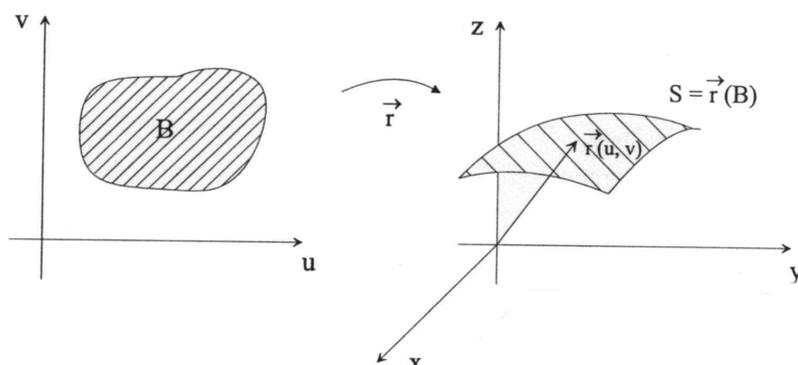
$$\mathbf{r}(u, v) := \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{mit } (u, v) \in B)$$

schreiben. Da \mathbf{r} von zwei Parametern u und v abhängt, ist zu erwarten, dass der Wertebereich $S := \mathbf{r}(B)$ eine Fläche in \mathbb{R}^3 darstellt (s. Skizze unten).

\mathbf{r} sei auf dem Bereich B stetig differenzierbar. Die partiellen Ableitungen

$$\mathbf{r}_u(u, v) := \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_v(u, v) := \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}$$

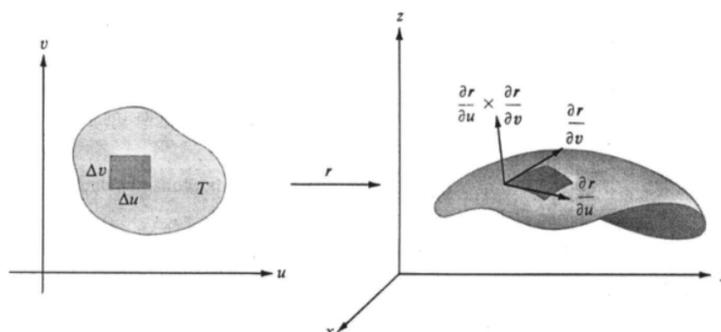
sollen nun geometrisch gedeutet werden.



Dazu betrachten wir nun einen (festen) inneren Punkt (u_0, v_0) von B . Dann durchlaufen die Punkte (u, v_0) (für variables u) bzw. (u_0, v) (für variables v) Strecken in B , die zur u - bzw. v -Achse parallel liegen. Die Bildvektoren $\mathbf{r}(u, v_0)$ bzw. $\mathbf{r}(u_0, v)$ dieser Strecken beschreiben jeweils Kurven in der Fläche S , deren Tangentialvektoren im Punkt (u_0, v_0) gegeben sind durch $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ bzw. $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. Das Vektorprodukt

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$

steht senkrecht auf diesen Vektoren (s. Mathematik A, Definition 4.2). Durch das Vektorprodukt ist also ein Normalenvektor auf der Fläche S im Punkt $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ gegeben.



Definition 2.1 Sei $\mathbf{r} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion auf B . Dann nennen wir das Bild $S := \mathbf{r}(B)$ ein reguläres Flächenstück in \mathbb{R}^3 , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. \mathbf{r} bildet B bijektiv auf S ab,
2. $\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ für alle $(u, v) \in B$.

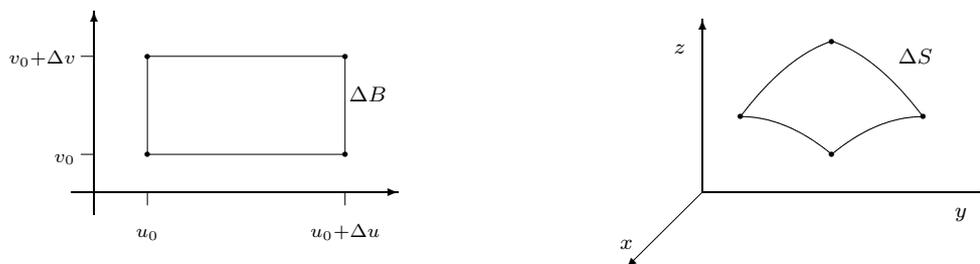
Die Funktion \mathbf{r} heißt Parameterdarstellung der Fläche S und B wird Parameterbereich des Flächenstücks S genannt.

Anmerkung: Durch die 2. Bedingung ist also sichergestellt, dass in jedem Punkt $\mathbf{r}(u, v)$ der Fläche S ein Normalenvektor $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$ existiert.

Im Folgenden wird der Betrag $\|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\|$ geometrisch gedeutet. Dazu betrachten wir das Flächenelement ΔB in B mit den Eckpunkten (sh. Skizze unten)

$$(u_0, v_0), (u_0 + \Delta u, v_0), (u_0, v_0 + \Delta v), (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

dessen Flächeninhalt durch $|\Delta B| := \Delta u \Delta v$ gegeben ist. Die Bilder unter \mathbf{r} der vier Punkte sind die Eckpunkte des krummen Parallelogramms ΔS .



Der Flächeninhalt $|\Delta S|$ von ΔS kann nun wie folgt approximiert werden (s. hierzu Mathematik A, Definition 4.2 (Vektorprodukt)):

$$\begin{aligned} |\Delta S| &\approx \|(\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)) \times (\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0))\| \\ &\approx \|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \Delta v\| \\ &= \|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\| \Delta u \Delta v \end{aligned} \quad (2.1)$$

Zusammenfassend halten wir fest, dass unter den gegebenen Voraussetzungen gilt:

- Der Vektor $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$ ist ein Normalenvektor auf der Fläche S im Punkt $\mathbf{r}(u, v)$.
- Das Flächenelement ΔS im Punkt $\mathbf{r}(u, v)$ ist näherungsweise gegeben durch $|\Delta S| \approx \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \Delta u \Delta v$

Die oben erläuterten Größen sollen nun an einigen Beispielen, die in Anwendungen häufig auftreten, erläutert werden.

Beispiel 2.1 :

- a) Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $h : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Bekanntlich ist der **Graph** von h eine Fläche S in \mathbb{R}^3 . Für S erhält man eine Parameterdarstellung im Sinne der Definition 2.1 wie folgt:

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x, y) \end{pmatrix}, (x, y) \in B$$

Hier ist $u = x$, $v = y$. Für den Normalenvektor auf S im Punkt $\mathbf{r}(x, y)$ gilt:

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_x(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_x(x, y) \\ -h_y(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y)\| = \sqrt{1 + h_x(x, y)^2 + h_y(x, y)^2}$$

- b) Setze in Zylinderkoordinaten $\varrho = a$, wobei $a > 0$ konstant ist. Nach Mathematik B (Abschnitt 7.4) wird durch

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b$$

eine **Zylinderfläche** der Höhe b und dem Radius a mit der z -Achse als Symmetrieachse definiert. Hier ist $u = \varphi$ und $v = z$. Für das Normalenfeld und dessen Betrag erhält man folgende Ausdrücke:

$$\mathbf{r}_\varphi(\varphi, z) \times \mathbf{r}_z(\varphi, z) = a \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{r}_\varphi(\varphi, z) \times \mathbf{r}_z(\varphi, z)\| = a$$

- c) Setze in Kugelkoordinaten $r = R$, wobei $R > 0$ konstant sei. Nach Mathematik B, Abschnitt 7.4 wird durch

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

eine Parameterdarstellung der **Kugeloberfläche** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ erklärt. Analog wie oben erhält man:

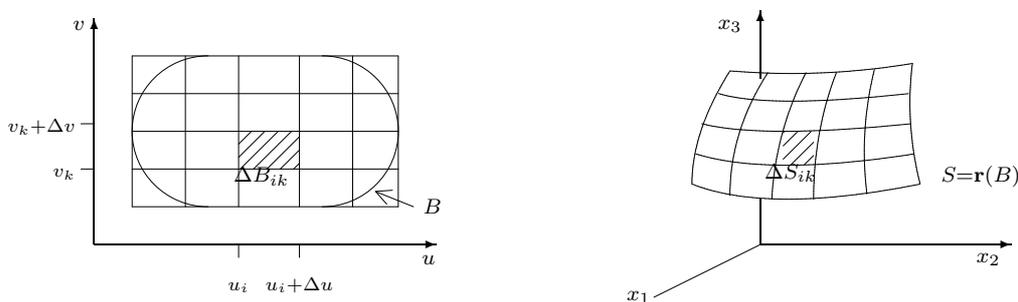
$$\mathbf{r}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_\varphi(\vartheta, \varphi) = R^2 \sin \vartheta \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{r}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_\varphi(\vartheta, \varphi)\| = R^2 \sin \vartheta$$

2.2 Das Flächenintegral eines Skalarfeldes

Zur Einführung betrachten wir ein reguläres Flächenstück S , das in der Parameterdarstellung $\mathbf{r} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vorliegt. Die Fläche S sei mit Masse belegt gemäß einer stetigen Dichtefunktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Überziehen wir B mit einem Netz, das aus endlich vielen achsen-parallelen Strecken gebildet wird, so wird dieses auf ein krummliniges Netz, bestehend aus Kurven auf S , abgebildet.



Das schattierte Rechteck $\Delta B_{ik} := [u_i, u_i + \Delta u] \times [v_k, v_k + \Delta v]$ besitze unter \mathbf{r} das Bild ΔS_{ik} , dessen Masse angenähert durch $f(\mathbf{r}(u_i, v_k)) |\Delta S_{ik}|$ gegeben ist. Die gesamte Masse von S wird, wenn wir $|\Delta S_{ik}| \approx \|\mathbf{r}_u(u_i, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_k)\| \Delta u_i \Delta v_k$ berücksichtigen, näherungsweise gegeben sein durch

$$\sum_{i,k} f(\mathbf{r}(u_i, v_k)) \|\mathbf{r}_u(u_i, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_k)\| \Delta u_i \Delta v_k \quad (2.2)$$

Man wird nun erwarten dürfen, daß bei zunehmender Verfeinerung des Rechtecknetzes die Summe (2.2) gegen das zweidimensionale Bereichsintegral

$$\int_B f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| du dv$$

konvergiert und dieses Integral exakt die Gesamtmasse M von S wiedergibt. Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

Definition 2.2 Das reguläre Flächenstück S liege in der Parameterdarstellung $\mathbf{r} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vor und f sei ein stetiges Skalarfeld auf S . Dann heißt

$$\int_S f dS := \int_B f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| du dv \quad (2.3)$$

Flächen- oder Oberflächenintegral der Funktion f über die Fläche S .

Zur ERLÄUTERUNG greifen wir auf die drei Flächen S zurück, die wir in Beispiel 2.1 beschrieben haben und für die wir den Term $\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|$ jeweils konkret bestimmt haben:

- a) Die Fläche S sei der Graph einer Funktion $h : B \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$; ferner sei B als Normalbereich gegeben: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$:

$$\begin{aligned} \int_S f \, dS &:= \int_B f(\mathbf{r}(x, y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(\mathbf{r}(x, y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dy \, dx \end{aligned}$$

- b) Für die Integration über die Zylinderfläche gilt:

$$\begin{aligned} \int_S f \, dS &:= \int_B f(\mathbf{r}(\varphi, z)) a \, d\varphi \, dz \\ &:= \int_0^b \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(\varphi, z)) a \, d\varphi \, dz \end{aligned}$$

- c) Die Integration über die Kugelfläche erfolgt nach der Formel:

$$\begin{aligned} \int_S f \, dS &:= \int_B f(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &:= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \end{aligned}$$

Bemerkungen :

- 1) Eine vorgegebene Fläche S im \mathbb{R}^3 besitzt verschiedene Parameterdarstellungen, d.h. dieselbe Fläche S kann durch unterschiedliche Funktionen \mathbf{r} dargestellt werden. Es sei ohne Beweis vermerkt, dass das Integral (2.3) nur von S (und der Funktion f), nicht aber von der speziellen Parameterdarstellung der Fläche S abhängt.
- 2) Wird in die Summe (2.2) $f = 1$ eingesetzt, so stellt sie eine Näherung für den Flächeninhalt von S dar. Dieser ist exakt gegeben durch

$$|S| = \int_S 1 \, dS$$

- 3) Die Anwendungsformeln aus Kapitel 7 (Mathematik B) (Schwerpunkt, Trägheitsmoment) kann man analog für Flächenintegrale formulieren.

Für jeden der oben angesprochenen drei Fälle geben wir ein Zahlenbeispiel an.

Beispiel 2.2 :

- a) Man berechne den Inhalt der Fläche $z = h(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$, die zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ liegt (Teil eines Paraboloids). S besitzt die Parameterdarstellung:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, h(x, y))^T \quad \text{mit} \quad (x, y) \in B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} |S| &= \int_S 1 \, dS = \int_B \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dx \, dy \quad (\text{s. 2 a}) \\ &= \int_B \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass in der zweiten Zeile die kartesischen Koordinaten durch Polarkoordinaten ersetzt wurden: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

- b) Die Zylinderoberfläche $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$, sei homogen mit Masse belegt. Die Flächendichte sei konstant γ . Zu berechnen sei das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse. Eine Parameterdarstellung der Fläche S lautet:

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z)^T, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq b$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S (x^2 + y^2) \gamma \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^b a^2 \gamma a \, dz \, d\varphi \quad (\text{s. 2 b}) \\ &= a^3 \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^b dz \, d\varphi = 2\pi a^3 b \gamma \end{aligned}$$

Wegen $M = |S| \gamma = 2\pi a b \gamma$ kann man auch schreiben: $I_z = a^2 M$

- c) Die Fläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ (Hälfte einer Kugeloberfläche) sei homogen mit Masse besetzt, nämlich mit der konstanten Dichte 1. Man berechne die Koordinaten des Schwerpunktes. Aus Symmetriegründen gilt: $\bar{x} = \bar{y} = 0$, so daß nur \bar{z} berechnet werden muß. S besitzt folgende Parameterdarstellung:

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}\bar{z} \cdot M &= \int_S z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R \cos \vartheta)(R^2 \sin \vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \quad (s. 2c) \\ &= 2\pi R^3 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^3\end{aligned}$$

Nun gilt: $M = |S| \cdot 1 = 2\pi R^2$. Damit folgt: $\bar{z} = \frac{\pi R^3}{M} = \frac{1}{2}R$.
Der Schwerpunkt ist somit der Punkt $(0, 0, R/2)$.

Die **Linearitätseigenschaft** für Flächenintegrale:

Es seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf S und es sei c eine Konstante. Aus der Definition des Flächenintegrals folgt, wenn man die entsprechende Eigenschaft für Bereichsintegrale berücksichtigt, die folgende Linearitätseigenschaft:

$$1) \int_S (f + g) \, dS = \int_S f \, dS + \int_S g \, dS, \quad 2) \int_S (cf) \, dS = c \int_S f \, dS$$

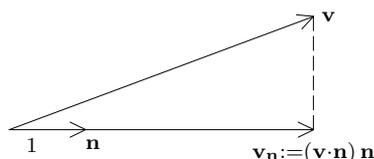
Verallgemeinerung des Flächenintegrals:

S_1, \dots, S_m seien reguläre Flächenstücke in \mathbb{R}^3 , so daß sich zwei Flächenstücke S_i, S_k für $i \neq k, i, k \in \{1, \dots, m\}$ höchstens in ihren Randkurven überschneiden. Dann wird $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ eine **reguläre Fläche** genannt und das Integral einer stetigen Funktion f über S wird definiert durch:

$$\int_S f \, dS := \int_{S_1} f \, dS + \int_{S_2} f \, dS + \dots + \int_{S_m} f \, dS$$

2.3 Das Flächenintegral eines Vektorfeldes

Vor Einführung eines solchen Integrals soll an den Begriff der **Projektion** eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ längs eines Vektors $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ erinnert werden (vgl. Mathematik A, Beispiel 4.2). Wir setzen \mathbf{n} als Einheitsvektor voraus. Die Projektion von \mathbf{v} auf den von \mathbf{n} erzeugten Strahl ist der Vektor $\mathbf{v}_n := (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$. Die Zahl $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ bezeichnen wir auch als Komponente von \mathbf{v} längs \mathbf{n} .



Gegeben sei nun das reguläre Flächenstück S , dargestellt durch $\mathbf{r} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ferner sei $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Der Vektor

$$\mathbf{n}(u, v) := \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|} \quad (2.4)$$

ist ein Einheitsvektor, der im Flächenpunkt $\mathbf{r}(u, v)$ normal auf der Fläche S steht. Die skalare Größe

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \quad (2.5)$$

ist die Komponente des Feldvektors $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v))$ in Bezug auf den Normalvektor $\mathbf{n}(u, v)$. Sie wird im Folgenden Normalkomponente des Feldvektors $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v))$ genannt. Über diese Normalkomponenten, nämlich über das Skalarfeld $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$, wird nun integriert.

In die Formel (2.3) setzen wir $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ für f ein und beachten die Beziehung (2.4). Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, du \, dv \\ &= \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) \, du \, dv \end{aligned}$$

Definition 2.3 Die Fläche S sei wie oben angegeben definiert und $\mathbf{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein stetiges Vektorfeld auf S . Dann heißt

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) \, du \, dv \quad (2.6)$$

Fluß des Feldes \mathbf{f} durch S (in Richtung \mathbf{n}).

Anmerkung: Für das Integral benutzt man auch das Symbol $\int_S \mathbf{f} \cdot d\vec{S}$ (d.h. es wird $d\vec{S} := \mathbf{n} \, dS$ gesetzt).

Zur ERLÄUTERUNG stellen wir die Integration eines Vektorfeldes über die drei Flächen S des Beispiels 2.1 dar, für die der Term $(\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v))$ konkret bestimmt worden ist. Wie die Integration über den entsprechenden Parameterbereich B aus \mathbb{R}^2 auszuführen ist, sollte nun klar sein:

$$\text{a) } \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} -h_x \\ -h_y \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy$$

$$b) \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(\varphi, z)) \cdot a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \, dz$$

$$c) \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

Physikalische Deutung: Eine Flüssigkeit möge sich in einem gewissen Raumbereich bewegen, und zwar so, daß ein Partikel beim Durchgang durch den Punkt \mathbf{x} die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ besitze. \mathbf{v} sei also nur orts-, nicht zeitabhängig. (Man spricht dann von einer stationären Strömung). An der Stelle \mathbf{x} habe die Flüssigkeit die Massendichte $\varrho(\mathbf{x})$. Der Vektor

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \varrho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

wird als Flußdichte an der Stelle \mathbf{x} bezeichnet. Seine physikalische Dimension im MKS-System ist

$$\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{sec} = \frac{kg}{m^2 sec}$$

Dann ist $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ die Komponente von \mathbf{f} in Richtung \mathbf{n} , das Flächenintegral $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ hat die physikalische Dimension

$$\frac{kg}{m^2 sec} m^2 = \frac{kg}{sec}$$

und gibt die Masse an, die durch die Fläche S in Richtung \mathbf{n} pro *sec* fließt. Ist S die Oberfläche eines Bereichs („Körpers“) im \mathbb{R}^3 , so gibt $\oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ den Unterschied zwischen hinein- und herausfließender Masse (pro *sec*) an. Ist dieses Integral positiv, so bedeutet es, dass innerhalb der Oberfläche „Quellen“ liegen, ist es negativ, so befinden sich darin „Senken“ (oder negative Quellen).

Grob gesprochen kann man das Flächenintegral über \mathbf{f} als Maßzahl für die Stärke, mit der das Feld durch die Fläche S „hindurchgreift“, ansehen. Sie hängt nicht nur von der Größe der Fläche und der Stärke des Feldes, sondern auch von der Lage der Fläche zu den Feldlinien ab.

Beispiel 2.3 :

- 1) Berechne $\int_S (z\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS$, wenn S der Teil des Paraboloids $z = h(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ ist, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ liegt. S wird

dargestellt durch $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, h(x, y))^T$ mit $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} \int_S (z \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_B (1 - (x^2 + y^2)) \mathbf{e}_3 \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy \quad (\text{nach a}) \\ &= \int_B (1 - (x^2 + y^2)) dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \, d\varphi = \pi \quad (\text{Polarkoordinaten}) \end{aligned}$$

- 2) Berechne $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS$ für die Fläche $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq b\}$ (Zylinder mit Radius a und Höhe b um die z -Achse). Eine Parameterdarstellung für S lautet:

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z)^T, \text{ mit } 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z \leq b$$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_B \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \, dz \quad (\text{nach b}) \\ &= \int_0^b \int_0^{2\pi} a^2 d\varphi \, dz \\ &= 2\pi b a^2 \end{aligned}$$

- 3) Das Feld einer Punktladung im Ursprung, also $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{r^3}$ soll über die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ integriert werden. Die Oberfläche S wird dargestellt durch

$$\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \text{ mit } \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]$$

Nach Beispiel 2.1),3) gilt:

$$\mathbf{n}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{R}$$

Man kann hier den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} auf S in der Form $\mathbf{n} = \mathbf{r}/R$ (mit $|\mathbf{r}| = R$) angeben. Die Integration des Feldes $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{r^3}$ läßt sich damit sehr einfach bewerkstelligen:

$$\oint_S \frac{c\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_S \frac{c\mathbf{r}}{R^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} \, dS = c \oint_S \frac{1}{R^2} \, dS = \frac{c}{R^2} \oint_S 1 \, dS = 4\pi c$$

Dabei ist zu beachten das $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = R^2$ und $|S| = 4\pi R^2$ ist.

Die Rechnung ist etwas aufwändiger, wenn man strikt nach der Formel (2.6) vorgeht.

Jede reguläre Fläche S besitzt zwei Normalenfelder, \mathbf{n} und das entgegengesetzte Normalenfeld $-\mathbf{n}$; das Flußintegral (2.6) in Bezug auf die beiden Normalenfelder unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen.

2.4 Die Integralsätze

Die Integralsätze von Gauß und Stokes sind ein wichtiges Hilfsmittel für den Naturwissenschaftler und Ingenieur. Ursprünglich sind sie auch aus naturwissenschaftlichen Fragestellungen hervorgegangen. Der Integralsatz von Gauß lehrt, daß man ein Oberflächenintegral eines Vektorfeldes \mathbf{f} in ein räumliches Bereichsintegral über $\operatorname{div} \mathbf{f}$ umformen kann.

Satz 2.1 (Divergenzsatz von Gauß)

V sei ein regulärer Bereich des \mathbb{R}^3 und seine Oberfläche S sei eine reguläre Fläche. \mathbf{f} sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf V . Dann gilt bei nach Außen gerichtetem Normalfeld \mathbf{n} :

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz \quad (2.7)$$

Ein nicht ganz allgemein geführter „Beweis“ für diesen Satz wird am Ende des Abschnitts angegeben.

Wir erläutern den Satz, indem wir für konkrete Beispiele jeweils die beiden Integrale der Gleichung (2.7) berechnen und bestätigen, dass sich dasselbe Ergebnis einstellt.

Beispiel 2.4 :

- 1) V sei die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ und S ihre Oberfläche. Für das Feld $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ wird der Gaußsche Satz verifiziert. Wegen $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$ (für $\mathbf{r} \in S$) gilt:

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} \, dS = R \int_S 1 \, dS = 4\pi R^3$$

Bei der Rechnung wurde benutzt, dass $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = R^2$ für $\mathbf{r} \in S$ ist.

Da $\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$ gilt, folgt andererseits:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{r} \, dx \, dy \, dz = 3 \int_V 1 \, dx \, dy \, dz = 3|V| = 4\pi R^3$$

- 2) S sei die Oberfläche eines rotationssymmetrischen Zylinders um die z -Achse mit Radius a und Höhe h , V sei der von S umschlossene Bereich. Das Vektorfeld sei wie folgt gegeben:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x, y, z) := (x^2 + y^2)(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)$$

Wir berechnen zunächst das Oberflächenintegral; wir setzen für x und y ein: $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$. Dann stellt sich das Feld wie folgt dar:

$$\mathbf{f}(\varrho, \varphi, z) := (\varrho^2)(\varrho \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \varrho \sin \varphi \mathbf{e}_2)$$

Die Fläche S besteht aus der Mantelfläche S_1 sowie dem „Deckel“ S_2 und dem „Boden“ S_3 des Zylinders. Letztere haben die nach außen gerichteten Flächennormalen $\mathbf{n} := \mathbf{e}_3$ bzw. $\mathbf{n} := -\mathbf{e}_3$, die orthogonal auf den Feldvektoren stehen. Somit gilt für Punkte \mathbf{r} aus $S_2 \cup S_3$: $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0$. Es ist also nur die Integration über die Fläche S_1 zu berücksichtigen; beachte, dass für Punkte aus S_1 gilt: $\varrho = a$.

$$\int_{S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h a^2 \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dz \, d\varphi = a^4 2\pi h$$

Wir berechnen nun das rechts stehende Integral in (2.7). Für $\operatorname{div} \mathbf{f}$ erhalten wir:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = 4(x^2 + y^2)$$

Wir bilden nun das 3-dim. Bereichsintegral über den Zylinder V (in Zylinderkoordinaten):

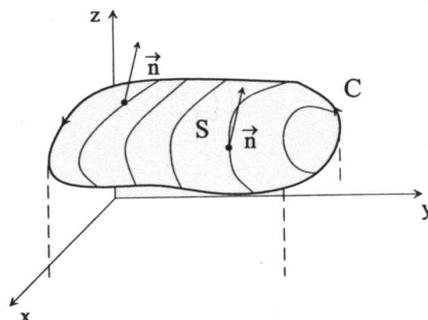
$$\int_V 4(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = 4 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^h \varrho^2 \varrho \, dz \, d\varphi \, d\varrho = a^4 2\pi h \quad \square$$

Der Stokessche Satz, ein für die Mathematik und Physik gleichermaßen wichtiger Satz, erlaubt es, ein Kurvenintegral eines Vektorfeldes \mathbf{f} in ein Flächenintegral über $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ umzuformen.

Satz 2.2 (Stokesscher Satz)

S sei ein reguläres Flächenstück in \mathbb{R}^3 , dessen Rand durch die geschlossene Kurve C gegeben sei. Die Kurve C soll so durchlaufen werden, daß ihr Umlaufsinn zusammen mit der Normalenrichtung \mathbf{n} eine Rechtsschraubung ergibt. Das Vektorfeld \mathbf{f} sei auf S stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.8)$$



Ein nicht ganz allgemein geführter „Beweis“ ist am Ende des Abschnitts angegeben.

Wir erläutern den Satz mit Hilfe eines konkreten Beispiels, für das wir die beiden Integrale in der Gleichung (2.8) berechnen.

Beispiel 2.5 :

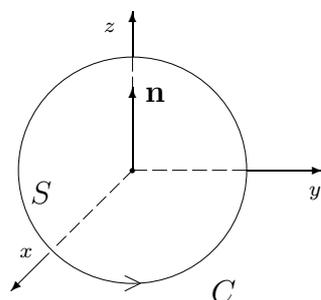
Die Fläche S sei die Kreisscheibe in der xy -Ebene mit Radius a und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Das Vektorfeld sei durch $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-y, x, 0)^T$ gegeben. Wir verifizieren den Stokeschen Satz. Eine Parameterdarstellung der Randkurve C von S lautet:

$$\mathbf{r}(t) = a \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot a \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}^T dt = 2\pi a^2$$

Wählen wir als Normale von S den Vektor $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, so bildet \mathbf{n} mit dem Umlaufsinn von C eine Rechtsschraubung. Man stellt fest: $\mathbf{rot} \mathbf{f} = (0, 0, 2)^T$.

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 2 \int_S 1 \, dS = 2\pi a^2$$



Eng verwandt mit dem Gaußschen Integralsatz sind einige andere Integralumformungen, zum Beispiel die INTEGRALSÄTZE VON GREEN, die in der Feldtheorie vielfach Anwendung finden. Sie werden in den Übungen behandelt.

Später benötigen wir die Stokessche Formel noch in einer etwas spezielleren Fassung. Zu diesem Zweck legen wir ein Vektorfeld zugrunde, das explizit nicht von der Variablen z abhängt und dessen \mathbf{e}_3 -Komponente null ist. Ein solches Feld besitzt in kartesischen Koordinaten die Darstellung:

$$\mathbf{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Rotation von \mathbf{f} ist (falls \mathbf{f} differenzierbar ist) dann durch

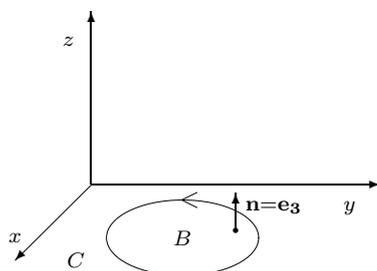
$$\mathbf{rot} \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3$$

gegeben. Sei B ein Bereich in der xy -Ebene, der von einer einfach geschlossenen Kurve C berandet wird. C sei positiv orientiert. Das Normalenfeld \mathbf{e}_3 auf B bildet dann mit C eine Rechtsschraubung. Wir erhalten dann für \mathbf{f} durch Einsetzen in (2.8) die folgende **Stokessche Formel für die Ebene**:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.9)$$

Mit $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ und $d\mathbf{r} = (dx, dy)^T$ erhält man die Formel in der Form:

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$



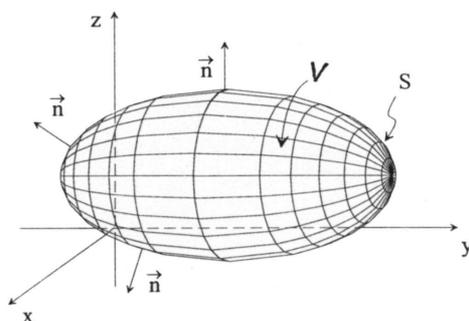
Natürlich kann man ganz entsprechend aus (2.7) auch einen Gauß'schen Satz für die Ebene ableiten.

Ergänzungen* (Beweise):

Wie bereits erwähnt, führen wir den BEWEIS DES GAUSSSCHEN SATZES nicht allgemein, sondern für einen etwas spezielleren Bereich V des \mathbb{R}^3 .¹ Wir legen hier den Fall, daß sich V als Normalbereich in Bezug auf jede Koordinatenebene darstellen läßt, zugrunde. Betrachten wir V zunächst als Normalbereich in Bezug auf die xy -Ebene, also in einer Darstellung der Form:

$$V = \{(x, y, z) \mid h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y), (x, y) \in B\}$$

Wir zeigen: $\int_V \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz = \oint_S (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} dS$



Es ist

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz &= \int_B \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \int_B (f_3(x, y, h_2(x, y)) - f_3(x, y, h_1(x, y))) dx dy \end{aligned} \quad (2.10)$$

¹Eine Beweisführung, die die vorliegende „ausreichend“ verallgemeinert, ist bei H.Heuser, Lehrbuch der Analysis II, Nr. 210, zu finden.

Eine Parameterdarstellung für S_2 („obere Hälfte“ von S) ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(x, y) := (x, y, h_2(x, y))^T, \quad (x, y) \in B$$

Ein nach Außen gerichtetes Normalenfeld lautet: $(-h_{2x}, -h_{2y}, 1)^T =: \mathbf{N}(x, y)$.

$$\begin{aligned} \int_{S_2} (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_B (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot (-h_{2x} \mathbf{e}_1 - h_{2y} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \, dx \, dy \\ &= \int_B f_3(x, y, h_2(x, y)) \, dx \, dy \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wenn man beachtet, daß für S_1 („untere Hälfte“ von S) als Normalenfeld $\mathbf{N}(x, y) = (h_{1x}, h_{1y}, -1)^T$ zu nehmen ist, so erhält man analog:

$$\int_{S_1} (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_B f_3(x, y, h_1(x, y)) \, dx \, dy \quad (2.12)$$

Vergleicht man (2.10) mit (2.11) und (2.12), so folgt:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \int_{S_2} (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_1} (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \oint_S (f_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (2.13)$$

Da man V ebenso als Normalbereich in Bezug auf die xz - bzw. yz -Ebene darstellen kann, erhält man genauso die folgenden Gleichungen:

$$\int_V \frac{\partial f_2}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \oint_S (f_2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.14)$$

$$\int_V \frac{\partial f_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \oint_S (f_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.15)$$

Wegen $\mathbf{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ und $\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$ folgt, indem man die Gleichungen (2.13)-(2.15) addiert, die behauptete Beziehung (2.7). \square

Auch der Beweis des Satzes von Stokes wird nicht allgemein geführt. Wir legen eine Fläche S zugrunde, die sich in der Form

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, h(x, y))^T, \quad (x, y) \in B$$

darstellen läßt mit einem Bereich B der xy -Ebene, den man als Normalbereich bezüglich der x -Achse schreiben kann:

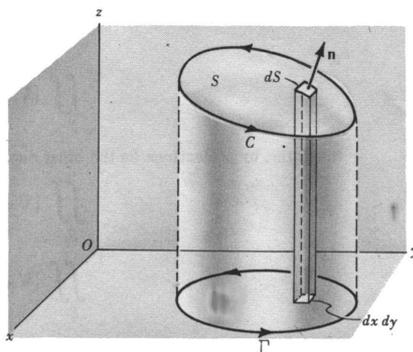
$$B = \{(x, y) \mid \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

(Entsprechende Darstellungen von S möge es mit Bereichen B' bzw. B'' der xz - bzw. yz -Ebene geben.)

Der Rand $\partial S =: C$ wird dann durch die folgenden beiden Kurvenstücke repräsentiert:

$$\mathbf{r}_1(x) = (x, \psi_1(x), h(x, \psi_1(x)))^T, \quad \mathbf{r}_2(x) = (x, \psi_2(x), h(x, \psi_2(x)))^T \quad \text{mit } a \leq x \leq b$$

Das erste Kurvenstück wird mit C_1 , das zweite mit C_2 bezeichnet.



Man bestätigt (z.B. mittels „Pseudodeterminante“): $\mathbf{rot}(f_1 \mathbf{e}_1) = \frac{\partial f_1}{\partial z} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial f_1}{\partial y} \mathbf{e}_3$.
 Ein Normalenfeld ist $(-h_x, -h_y, 1)^T$, es wird mit $\mathbf{N}(x, y)$ abgekürzt; man erhält:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial f_1}{\partial y} \mathbf{e}_3 \right) \cdot \mathbf{N}(x, y) = - \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} h_y + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Setzt man $F_1(x, y) := f_1(x, y, h(x, y))$, so ist dieser letzte Ausdruck nach der Kettenregel mit $-\frac{\partial F_1}{\partial y}$ identisch. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{rot}(f_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial f_1}{\partial y} \mathbf{e}_3 \right) \cdot \mathbf{N}(x, y) \, dx \, dy \\ &= - \int_B \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dx \, dy = - \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dy \, dx \\ &= \int_a^b (f_1(x, \psi_1(x), h(x, \psi_1(x))) - (f_2(x, \psi_2(x), h(x, \psi_2(x)))) \, dx \\ &= \int_a^b f_1(\mathbf{r}_1(x)) \, dx - \int_a^b f_1(\mathbf{r}_2(x)) \, dx \quad (\mathbf{r}_i(x) \text{ oben definiert}) \\ &= \int_{C_1} (f_1 \mathbf{e}_1) \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2^*} (f_1 \mathbf{e}_1) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C (f_1 \mathbf{e}_1) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Nun ist auf Grund der Voraussetzungen über S klar, daß man genau so

$$\int_S \operatorname{rot}(f_i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C f_i \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{r} \quad (i = 1, 2, 3)$$

erhält, woraus sich durch Summation die Formel (2.8) ergibt. \square

2.5 Folgerungen aus den Integralsätzen

Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes wurden in Abhängigkeit eines kartesischen Koordinatensystems eingeführt. Mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes ist es möglich, für Divergenz und Rotation eine koordinatenfreie Darstellung herzuleiten. Dies bedeutet dann, daß diese beiden Größen von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind. Außerdem eröffnet diese Darstellung die Möglichkeit, Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes physikalisch zu deuten.

Satz 2.3 Sei V_r eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt \mathbf{a} und S_r sei die Oberfläche von V_r . Für ein auf V_r stetig differenzierbares Vektorfeld \mathbf{f} gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|V_r|} \oint_{S_r} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.16)$$

Hierin ist \mathbf{n} die äußere Normale auf S_r .

An Stelle von Kugeln können in (2.16) auch beliebige andere reguläre Bereiche (z.B. Würfel) gewählt werden, die im Grenzprozeß auf den Punkt \mathbf{a} zusammengezogen werden.

BEWEIS: Im Folgenden wird der Gauss'sche Satz verwendet: $\int_{S_r} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. Dabei ist $d\mathbf{x} = dx \, dy \, dz$ gesetzt.

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_r} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS - |V_r| \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \right| &= \left| \int_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \, d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{V_r} \operatorname{div} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in V_r} |\operatorname{div} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}))| \cdot |V_r| \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{|V_r|} \int_{S_r} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS - \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \right| &\leq \max_{\mathbf{x} \in V_r} |\operatorname{div} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}))| \end{aligned}$$

Für $r \rightarrow 0$ strebt dieser letzte Ausdruck gegen 0, womit die Gleichung (2.16) begründet ist. \square

Physikalische Deutung der Divergenz:

Zu diesem Zweck deuten wir \mathbf{f} wieder als Flußdichte eines stationären Strömungsfeldes. Für ein hinreichend **kleines** Volumen (Kugel) $|V_r|$ folgt aus (2.16) die Näherung:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \approx \frac{1}{|V_r|} \oint_{S_r} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.17)$$

Nun ist $\oint_{S_r} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ die Masse, die pro sec durch die Oberfläche S_r hindurchfließt. Wegen der nach Außen gerichteten Normalen wird die einströmende Masse negativ, die austretende positiv gezählt. Überwiegt der positive Anteil, so müssen im Bereich V_r Quellen liegen, überwiegt der negative Anteil, so befinden sich darin Senken (negative Quellen). Wenn man für sehr kleines r die Kugel V_r mit $\{\mathbf{a}\}$ identifiziert, so wird man folgendes sagen können: Ist $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a})$ positiv, so ist \mathbf{a} ein Quellpunkt (d.h. von \mathbf{a} treten Feldlinien aus); ist $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a})$ negativ, so ist \mathbf{a} ein Senkenpunkt (negativer Quellpunkt) (d.h. in \mathbf{a} treten Feldlinien ein). \mathbf{f} heißt auf einem Bereich B **quellenfrei**, falls $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ ($\forall \mathbf{x} \in B$) gilt.

Da auf der rechten Seite von (2.17) durch $|V_r|$ dividiert wird, wird $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a})$ auch die Quelledichte von \mathbf{f} im Punkt \mathbf{a} genannt.

Die Gaußschen Formel $\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz = \oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ ist eine Beziehung, die die „Summe“ über die Quelledichte im Bereich V mit der Masse, die pro sec durch die Oberfläche S hindurchströmt, in Beziehung setzt.

Satz 2.4 *Sei S_t eine Kreisscheibe mit Radius t und Mittelpunkt \mathbf{a} . C_t sei die Randkurve von S_t , deren Umlaufsinn mit einer gewählten Normalenrichtung \mathbf{n} eine Rechtsschraubung darstellt. Für ein in einer Umgebung von S_t stetig differenzierbares Vektorfeld \mathbf{f} gilt dann:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|S_t|} \oint_{C_t} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.18)$$

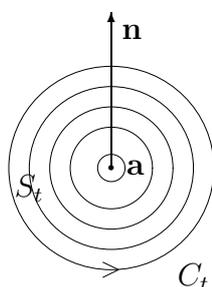
An Stelle von Kreisscheiben S_t können in (2.18) auch beliebige andere reguläre Flächenstücke (z.B. Rechtecke) gewählt werden, die im Grenzprozeß auf den Punkt \mathbf{a} zusammengezogen werden.

BEWEIS: In die folgenden Überlegungen geht der Satz von Stokes ein: $\oint_{C_t} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{S_t} \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dS$. Damit folgt:

$$\left| \oint_{C_t} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - |S_t| \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \right| = \left| \int_{S_t} \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{S_t} \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \, dS \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{S_t} \mathbf{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n} \, dS \right| \\
&\leq \max_{\mathbf{x} \in S_t} |\mathbf{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n}| |S_t| \\
\Rightarrow \left| \frac{1}{|S_t|} \oint_{C_t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dr - \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} \right| &\leq \max_{\mathbf{x} \in S_t} |\mathbf{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{n}|
\end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ strebt dieser letzte Ausdruck gegen 0, womit die Gleichung (2.18) begründet ist. \square



Physikalische Deutung der Rotation:

Das Feld \mathbf{f} deuten wir als Kraftfeld. Das Kurvenintegral $\oint_{C_t} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ gibt dann die Arbeit an, die das Feld leistet, wenn ein Punkt die geschlossene Kurve C_t um die Achse \mathbf{n} durchläuft. Nun ist $\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}$ Grenzwert der Größe $\left(\oint_{C_t} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right) / |S_t|$ (Arbeit bezogen auf eine Flächeneinheit). Dies heißt: $\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}$ gibt an, in welchem Umfang das Feld Arbeit leistet, wenn der Massenpunkt „eng“ um die „Achse“ \mathbf{n} um \mathbf{a} herumgeführt wird. Gilt $\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, so sagt man, das Feld besitzt im Punkt \mathbf{a} einen Wirbel. Man sagt ferner, \mathbf{f} ist auf einem Bereich B **wirbel- oder rotationsfrei**, wenn

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\forall \mathbf{x} \in B)$$

ist. Dies bedeutet: Die auf einem Gebiet G wirbelfreien Felder \mathbf{f} sind genau jene, die darauf die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Wenn G einfach zusammenhängend ist, so ist ein solches Feld (und nur ein solches) ein Gradientenfeld und umgekehrt (d.h. es gilt $\mathbf{f} = -\nabla U$ auf G).

Betrachtet werde ein \mathcal{C}^2 -Vektorfeld auf G (G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{R}^3). Falls \mathbf{f} auf G **wirbelfrei** ist, besitzt \mathbf{f} auf G ein Potential U .

1) Sei nun \mathbf{f} auf $G_1 \subset G$ zusätzlich quellenfrei. Dann gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

d.h. in einem quellen- und wirbelfreien Gebiet G_1 gilt für U die **Laplace-sche Differentialgleichung**: $\Delta U = 0$.

- 2) Besitzt das Feld dagegen auf $G_2 \subset G$ die Quelldichte ϱ , d.h. es gilt $\operatorname{div} \mathbf{f} = \varrho$, so begründet man wie oben, daß U der so genannten **Poissonschen Differentialgleichung** genügt: $\Delta U = -\varrho$.

2.6 Krummlinige Koordinaten

Die Situation, die kartesischen Koordinaten x, y, z durch neue Variable u, v, w zu ersetzen, haben wir bereits in Abschnitt 7.4 (Mathematik B) kennen gelernt. Dabei wurde eine Substitution der Form

$$\mathbf{x} := \Phi(u, v, w) := \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in B^* \quad (2.19)$$

ausgeführt. Durch diese Gleichung werde eine Abbildung Φ auf B^* festgelegt. Wir nennen Φ einen **zulässigen Koordinatenwechsel** auf B^* , wenn Φ auf der Menge B^* eine stetig differenzierbare, injektive Funktion ist und die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\det J_{\Phi}(\mathbf{u}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in B^* \quad (2.20)$$

Sei $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, w_0)^T$ ein fester Punkt in B^* . Bei variablem u und festem v_0, w_0 wird dann durch

$$\mathbf{x}(u, v_0, w_0) := \begin{pmatrix} x(u, v_0, w_0) \\ y(u, v_0, w_0) \\ z(u, v_0, w_0) \end{pmatrix}$$

eine Kurve in \mathbb{R}^3 definiert, die durch den Punkt $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ verläuft. Sie wird u -Linie durch den Punkt $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ genannt. Es dürfte klar sein, wie die v - bzw. w -Linie durch $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ definiert sind. Der Tangentialvektor an jede dieser drei Linien im Punkt $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ ist jeweils gegeben durch

$$\mathbf{x}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0) \\ y_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0) \\ z_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_0) \\ y_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_0) \\ z_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_0) \\ y_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_0) \\ z_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix}$$

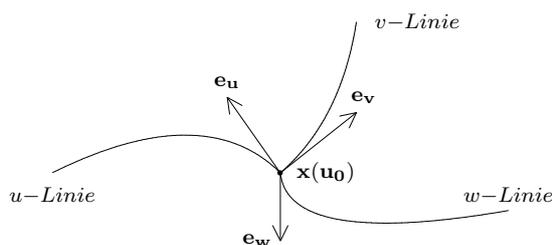
Diese drei Vektoren sind linear unabhängig, weil ihre Determinante nach (2.20) nicht Null ist. Ihre Längen

$$h_1(\mathbf{u}_0) := \|\mathbf{x}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0)\| \quad h_2(\mathbf{u}_0) := \|\mathbf{x}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_0)\| \quad h_3(\mathbf{u}_0) := \|\mathbf{x}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_0)\|$$

heißen Metrikoeffizienten. Die Vektoren

$$\mathbf{e}_u := \frac{1}{h_1(\mathbf{u}_0)} \mathbf{x}_u(\mathbf{u}_0) \quad \mathbf{e}_v := \frac{1}{h_2(\mathbf{u}_0)} \mathbf{x}_v(\mathbf{u}_0) \quad \mathbf{e}_w := \frac{1}{h_3(\mathbf{u}_0)} \mathbf{x}_w(\mathbf{u}_0) \quad (2.21)$$

bilden also eine **Basis aus Einheitsvektoren**² in \mathbb{R}^3 . Die Basis $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ ist von $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ abhängig, also in jedem Punkt $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ im allgemeinen anders.



Beachte: Schneiden sich die u -, v - und w -Linie (die sog. „Koordinatenlinien“) in jedem Punkt $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in B^*$, orthogonal, so bilden die Vektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ (für beliebiges $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$) eine Orthonormalbasis in \mathbb{R}^3 .

Beispiel 2.6 :

1) **Zylinderkoordinaten:** Man bestätigt, daß durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad B^* = \{(\varrho, \varphi, z) \mid \varrho > 0, 0 < \varphi \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$$

ein zulässiger Koordinatenwechsel auf B^* erklärt wird. Es gilt:

$$\mathbf{x}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, dass $h_1 := \|\mathbf{x}_\varrho\| = 1$, $h_2 := \|\mathbf{x}_\varphi\| = \varrho$, $h_3 = \|\mathbf{x}_z\| = 1$ ist; damit ist die Basis gemäß (2.21) (in den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) gegeben durch

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$, $\mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_z = 0$, $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z = 0$ ist, liegt eine ONB vor.

²In $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ stellen die Indizes keine partiellen Ableitungen dar.

2) **Kugelkoordinaten:** Man kann nachweisen, dass durch die Funktion

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{mit } B^* = \left\{ (r, \vartheta, \varphi) \mid \begin{array}{l} r > 0 \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 < \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

ein zulässiger Koordinatenwechsel auf B^* erklärt wird. Es gilt:

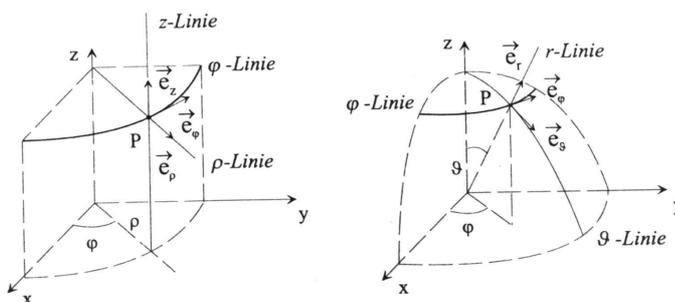
$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_\vartheta = r \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_\varphi = r \sin \vartheta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, dass $h_1 := \|\mathbf{x}_r\| = 1$, $h_2 := \|\mathbf{x}_\vartheta\| = r$, $h_3 := \|\mathbf{x}_\varphi\| = r \sin \vartheta$ ist. Man erhält durch

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine neue Basis von Einheitsvektoren in \mathbb{R}^3 . Man bestätigt, daß $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0$, $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$, $\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$ ist, also eine ONB vorliegt. Vergleicht man \mathbf{e}_r mit $\mathbf{r} = \mathbf{x}$, so sieht man, daß $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ist.

Die folgenden Skizzen zeigen die Koordinatenlinien und die entsprechenden Basisvektoren für Zylinder- und Kugelkoordinaten:



Ist ein Skalarfeld φ in Abhängigkeit kartesischer Koordinaten $(x, y, z) =: \mathbf{x}$ gegeben, so läßt sich durch Einsetzen des Vektors $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ die Funktion φ in Abhängigkeit der neuen Koordinaten $(u, v, w) =: \mathbf{u}$ ausdrücken:

$$\varphi(\mathbf{x}) := \varphi(\Phi(\mathbf{u}))$$

Bei einem Vektorfeld \mathbf{f} soll neben einer solchen Substitution stets auch ein Basiswechsel stattfinden.

Definition 2.4 Ein Vektorfeld $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei in kartesischen Koordinaten gegeben, also in der Form:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + f_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + f_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3 \quad (2.22)$$

Transformation des Feldes in das \mathbf{u} -System bedeutet, daß es in der Gestalt

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = F_1(\mathbf{u})\mathbf{e}_u + F_2(\mathbf{u})\mathbf{e}_v + F_3(\mathbf{u})\mathbf{e}_w \quad (2.23)$$

dargestellt wird.

Satz 2.5 (Transformationsatz)

Die Basis $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ gemäß (2.21) sei eine Orthonormalbasis in \mathbb{R}^3 . Ein Vektorfeld \mathbf{f} sei in kartesischen Koordinaten in der Form von (2.22) gegeben. Seine Komponentenfunktionen $F_i(\mathbf{u})$ im \mathbf{u} -System gemäß (2.23) kann auf folgende Weise ermitteln:

$$F_1(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\Phi(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_u \quad F_2(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\Phi(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_v \quad F_3(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\Phi(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{e}_w$$

Dabei müssen die Vektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ durch die kartesischen Einheitsvektoren \mathbf{e}_k dargestellt sein.

BEWEIS: Aus der Gleichheit

$$F_1(\mathbf{u})\mathbf{e}_u + F_2(\mathbf{u})\mathbf{e}_v + F_3(\mathbf{u})\mathbf{e}_w = f_1(\Phi(\mathbf{u}))\mathbf{e}_1 + f_2(\Phi(\mathbf{u}))\mathbf{e}_2 + f_3(\Phi(\mathbf{u}))\mathbf{e}_3$$

folgt durch Multiplikation mit \mathbf{e}_u (wenn man $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1$, $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = 0$, $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_w = 0$ berücksichtigt), die erste Beziehung. Die beiden anderen begründet man ähnlich. \square

Beispiel 2.7 :

Das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2$, soll in Zylinder- und Kugelkoordinaten transformiert werden.

Zylinderkoordinaten: Gesucht ist eine Darstellung der Form

$$\mathbf{F}(\varrho, \varphi, z) = F_1(\varrho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varrho + F_2(\varrho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + F_3(\varrho, \varphi, z)\mathbf{e}_z$$

$$F_1(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
F_2(\varrho, \varphi, z) &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho \\
F_3(\varrho, \varphi, z) &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
\implies \mathbf{F}(\varrho, \varphi, z) &= \varrho \mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: Gesucht ist eine Darstellung der Form

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_1(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r + F_2(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\vartheta + F_3(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi$$

Bei der Berechnung der folgenden Skalarprodukte sind für \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ , \mathbf{e}_φ ebenfalls die Darstellungen aus dem vorherigen Beispiel zu benutzen:

$$\begin{aligned}
F_1(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \\
F_2(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0 \\
F_3(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_\varphi = r \sin \vartheta \\
\implies \mathbf{F}(\varrho, \varphi, z) &= r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Die Differentialoperatoren „Gradient, Divergenz, Rotation und Laplaceoperator“ besitzen im \mathbf{u} -System eine andere Gestalt als in kartesischen Koordinaten. Dies liegt daran, daß die Vektoren \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v , \mathbf{e}_w selbst von den Variablen (u, v, w) abhängen.

Satz 2.6 (Die Differentialoperatoren in krummlinigen Koord.)

Die Vektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ mögen eine Orthonormalbasis und ein Rechtssystem bilden. Das Skalarfeld ψ sei in Abhängigkeit von \mathbf{u} gegeben, das Vektorfeld \mathbf{F} liege in der transformierten Form (2.23) vor. Dann lauten die Differentialoperatoren im \mathbf{u} -System:

$$\begin{aligned}
1) \quad \mathbf{grad} \psi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial w} \mathbf{e}_w \\
2) \quad \mathbf{div} \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial v} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 F_3) \right]
\end{aligned}$$

$$3) \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

$$4) \Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) \right]$$

Für die drei wichtigen Spezialfälle gilt:

- a) Kartesische Koordinaten x, y, z : $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, Basis: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
- b) Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z : $h_1 = 1, h_2 = \varrho, h_3 = 1$, Basis: $\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$.
- c) Kugelkoordinaten r, ϑ, φ : $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \vartheta$, Basis: $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$.

Der BEWEIS des Satzes befindet sich am Ende dieses Abschnitts.

Beispiel 2.8 :

Das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2$ lautet in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten nach dem letzten Beispiel:

$$\mathbf{F}(\varrho, \varphi, z) = \varrho \mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi$$

Wir berechnen $\operatorname{div} \mathbf{F}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ bzgl. beider Koordinatensysteme.

$$1) \text{ Zylinderkoordinaten: } \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\varrho F_3) \right]$$

$$\text{Wegen } F_1 = F_3 = 0 \text{ und } F_2 = \varrho \text{ folgt: } \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\varrho) \right] = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\varrho & \varrho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & \varrho F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\varrho & \varrho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \varrho^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho} (2\varrho) \mathbf{e}_z = 2\mathbf{e}_z$$

2) Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta F_1) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta F_2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F_3) \right]$$

Wegen $F_1 = F_2 = 0$, $F_3 = r \sin \vartheta$ folgt: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \sin \vartheta) = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\vartheta & r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_1 & rF_2 & r \sin \vartheta F_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\vartheta & r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \vartheta F_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} (2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \mathbf{e}_r - 2r^2 \sin^2 \vartheta \mathbf{e}_v) \\ &= 2(\cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \end{aligned}$$

BEWEIS von Satz 2.6*:

1) In kartesischen Koordinaten lauten $\mathbf{grad} \psi$ und \mathbf{e}_u :

$$\mathbf{grad} \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^T \quad \mathbf{e}_u = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)^T$$

Die \mathbf{e}_u -Komponente von $\mathbf{grad} \psi$ ist somit gegeben durch:

$$(\mathbf{grad} \psi) \cdot \mathbf{e}_u = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

Die letzte Identität ist nach der Kettenregel gültig. Analog erhält man für die \mathbf{e}_v - bzw. \mathbf{e}_w -Komponente von $\mathbf{grad} \psi$: $\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial v}$ bzw. $\frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial w}$. Damit ist 1) bewiesen.

2) Aus der Operatorenschreibweise (gemäß 1))

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_u}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{h_2} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{h_3} \frac{\partial}{\partial w}$$

ist ersichtlich, daß folgende Beziehungen gelten:

$$\mathbf{e}_u = h_1 \nabla u \quad \mathbf{e}_v = h_2 \nabla v \quad \mathbf{e}_w = h_3 \nabla w \quad (2.24)$$

Nun bilden die Vektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ nach Voraussetzung ein orthonormales Rechtssystem, so daß folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w &= h_2 h_3 (\nabla v \times \nabla w) \\ \Rightarrow \operatorname{div}(F_1 \mathbf{e}_u) &= \operatorname{div}(h_2 h_3 F_1 (\nabla v \times \nabla w)) \\ &= \mathbf{grad}(h_2 h_3 F_1) \cdot (\nabla v \times \nabla w) + h_2 h_3 F_1 \operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bei der letzten Umformung wurde Satz 6.18, 3) (Math. B) angewandt. Eine einfache, aber umständliche Rechnung (in kartesischen Koordinaten) zeigt, daß $\mathbf{div}(\nabla v \times \nabla w) = 0$ ist.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{div}(F_1 \mathbf{e}_u) &= \mathbf{grad}(h_2 h_3 F_1) \cdot \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{e}_u \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 F_1)\end{aligned}$$

Die letzte Umformung folgt, wenn man $\mathbf{grad}(h_2 h_3 F_1)$ nach 1) ausschreibt und dann das Skalarprodukt bildet. Da man entsprechende Resultate für $\mathbf{div}(F_2 \mathbf{e}_v)$ und $\mathbf{div}(F_3 \mathbf{e}_w)$ erhält, folgt dann durch Addition die Behauptung.

3) Wir bestimmen zunächst $\mathbf{rot}(F_1 \mathbf{e}_u)$. Wegen $\mathbf{e}_u = h_1 \nabla u$ folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(F_1 \mathbf{e}_u) &= \mathbf{rot}(h_1 F_1 \nabla u) \\ &= (h_1 F_1) \mathbf{rot}(\nabla u) - \nabla u \times \nabla(h_1 F_1) \quad (\text{s. Satz 6.18,4),B}) \\ &= \nabla(h_1 F_1) \times \nabla u \quad (\text{wegen } \mathbf{rot}(\nabla u) = 0)\end{aligned}$$

$\nabla(h_1 F_1)$ wird gemäß 1) geschrieben und ∇u durch $\frac{1}{h_1} \mathbf{e}_u$ ersetzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(F_1 \mathbf{e}_u) &= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u} (h_1 F_1) \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_1) \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_1) \mathbf{e}_w \right) \times \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_u \\ &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial w} (h_1 F_1) \mathbf{e}_v - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial v} (h_1 F_1) \mathbf{e}_w \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_u & h_2 \mathbf{e}_v & h_3 \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Benutzt wurde $\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_u = 0$, $\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_u = -\mathbf{e}_w$, $\mathbf{e}_w \times \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_v$ bei der vorletzten Umformung. Für $\mathbf{rot}(F_2 \mathbf{e}_v)$ und $\mathbf{rot}(F_3 \mathbf{e}_w)$ erhält man entsprechende Ergebnisse, wobei die letzte Zeile in der Determinante durch $(0, h_2 F_2, 0)$ bzw. $(0, 0, h_3 F_3)$ zu ersetzen ist. Durch Addition dieser Ergebnisse folgt 3).

4) Es gilt: $\Delta \psi = \mathbf{div}(\mathbf{grad} \psi)$. Die Behauptung folgt somit aus 1) und 2): Für F_1 ist $\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u}$ in 2) einzusetzen usw.

2.7 Zusammenfassung

Flächenintegrale in \mathbb{R}^3

Eine FLÄCHE S IM RAUM wird durch eine Parameterdarstellung der Form angegeben:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{mit } (u, v) \in B \subset \mathbb{R}^2)$$

Dabei wird zusätzlich gefordert: $\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ für alle $(u, v) \in B$.

Im Skript wurden konkret drei PARAMETERDARSTELLUNGEN von Flächen S in \mathbb{R}^3 mit Normalenfeld $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$ und dessen Betrag angegeben:

1. S ist der Graph einer stetigen Funktion $h : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
2. S ist die Fläche eines Zylinders mit Radius a und Höhe b (z -Achse ist Symmetrieachse).
3. S ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $\mathbf{0}$.

Das FLÄCHENINTEGRAL eines Skalarfeldes f über die Fläche S ist definiert durch

$$\int_S f \, dS := \int_B f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

Für die oben genannten drei FLÄCHEN lauten die Flächenintegrale:

1. S Graph einer Funktion h (B Normalbereich):

$$\int_S f \, dS = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(\mathbf{r}(x, y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dy \, dx$$

2. S Zylinderfläche:

$$\int_S f \, dS := \int_0^b \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(\varphi, z)) a \, d\varphi \, dz$$

3. S Kugelfläche:

$$\int_S f \, dS := \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

Die ANWENDUNGSFORMELN lassen sich nun „leicht“ aus den vorherigen Anwendungsformeln übertragen z. B. Flächeninhalt von S : $|S| = \int_S 1 \, dS$.

Das FLÄCHENINTEGRAL eines Vektorfeldes \mathbf{f} über die Fläche S ist definiert durch

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_B \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) \, du \, dv$$

Der Wert des Integrals wird Fluß des Feldes \mathbf{f} durch S genannt (Flußintegral).

Für die oben genannten drei Flächen lautet das Flußintegral von \mathbf{f} :

$$\text{Graph } h : \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathbf{f}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \begin{pmatrix} -h_x \\ -h_y \\ 1 \end{pmatrix} \, dy \, dx$$

$$\text{Zylinderfläche : } \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_0^b \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{r}(\varphi, z)) \cdot a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, d\varphi \, dz$$

$$\text{Kugelfläche : } \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS := \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

Der DIVERGENZSATZ VON GAUSS: V regulärer Bereich des \mathbb{R}^3 , S seine Oberfläche, \mathbf{n} nach Außen gerichtetes Normalenfeld, \mathbf{f} stetig differenzierbares Vektorfeld auf V .

Dann gilt:

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz$$

Der Satz von STOKES besagt: S Flächenstück in \mathbb{R}^3 , C Randkurve von S , \mathbf{f} stetig differenzierbares Vektorfeld auf S . Die Kurve C soll so durchlaufen werden, daß ihr Umlaufsinn zusammen mit der Normalenrichtung \mathbf{n} eine Rechtsschraubung ergibt. Dann gilt:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Kapitel 3

Funktionentheorie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Analysis **komplexer Funktionen**. Unter einer komplexen Funktion verstehen wir eine Funktion des Typs

$$f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \rightarrow w = f(z) \quad (3.1)$$

Von zentraler Bedeutung ist der Ableitungsbegriff, der, analog zur Analysis reeller Funktionen, als Grenzwert eines Differenzenquotienten eingeführt werden kann. Es zeigt sich aber, daß die Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion auf einem Gebiet G eine sehr scharfe Bedingung darstellt, aus der sich höchst bemerkenswerte Eigenschaften für die Funktion ableiten lassen, wie sie so für differenzierbare reelle Funktionen im allgemeinen nicht gelten. Einige dieser Eigenschaften werden als Grundlage für die in der Elektrotechnik überaus wichtigen Funktionaltransformationen (wie Fourier- Laplace- oder Z-Transformation) gebraucht. Auch (ebene) Potentialprobleme der Elektrotechnik können auf der Grundlage der Funktionentheorie analysiert werden.

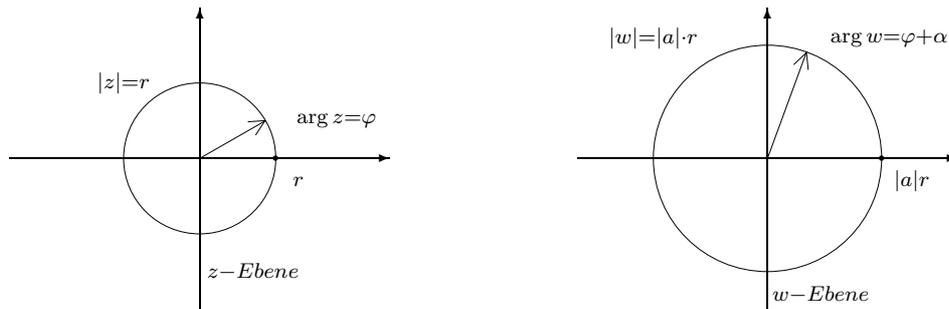
3.1 Einführung

Betrachtet werden also Funktionen des Typs (3.40). Zur **Veranschaulichung** von Abbildungseigenschaften der Funktion f studiert man oft die Bilder $f(\Gamma)$ spezieller Kurven Γ von G . Zu diesem Zweck stellt man G häufig in einer Ebene, der so genannten z -Ebene mit x - und y -Achse, dar, und verlegt den Wertebereich $f(G)$ in eine andere Ebene, die w -Ebene mit u - und v -Achse.

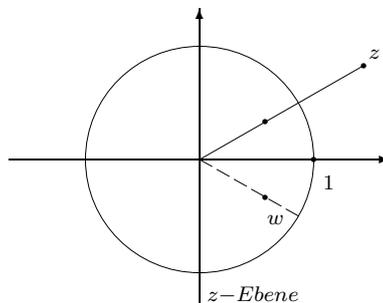
Beispiel 3.1 :

- 1) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + a$ (Addition einer Konstanten). Das Bild $w = f(z)$ ist gegenüber z um einen „Vektor“ a parallel verschoben.

- 2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az$ (Multiplikation mit einem Faktor a). In Polarform können wir a und z wie folgt darstellen: $a := |a| e^{j \arg a}$, $z := r e^{j \varphi}$. Dann ist $w = az = |a| r e^{j(\varphi + \arg a)}$. w ist gegenüber z um $|a|$ gestreckt und um $\arg a$ gedreht (**Drehstreckung**).



- 3) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z) := 1/z$ wird **Inversion** genannt. Setzt man $z = r e^{j \varphi}$, so folgt: $w = \frac{1}{r} e^{-j \varphi}$. w besitzt im Vergleich zu z die reziproke Länge $1/r$ und den Winkel $\arg w = -\varphi$. Dies kann man auch so ausdrücken: die Inversion setzt sich aus einer Spiegelung am Einheitskreis (reziproke Länge) und einer Spiegelung an der reellen Achse zusammen.



Spiegelung am Einheitskreis und der Re-Achse

Wir stellen eine interessante und für die Anwendung wichtige Abbildungseigenschaft vor. Dazu betrachten wir die folgenden Geraden parallel zur y -Achse bzw. parallel zur x -Achse:

- (1) $z = x_0 + jy$ (y variabel, x_0 fest) (Gerade parallel zur y -Achse)
- (2) $z = x + jy_0$ (x variabel, y_0 fest) (Gerade parallel zur x -Achse)

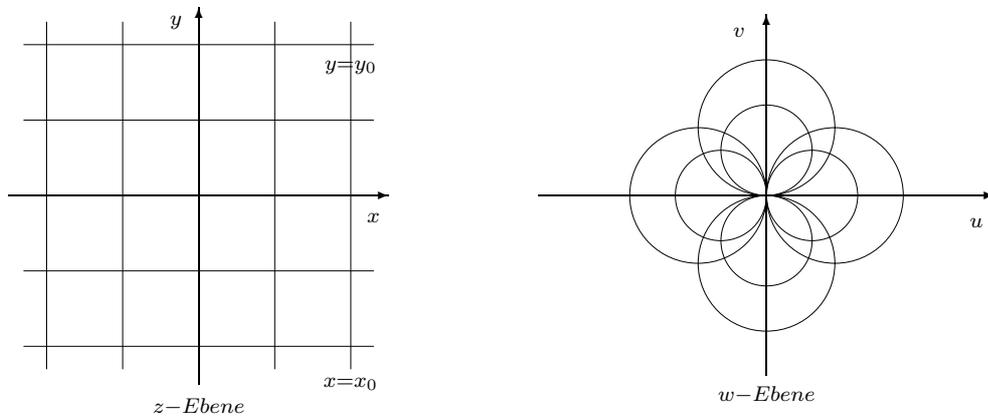
Unten wird begründet, dass die Funktion f die Geraden wie folgt abbildet:

Die Gerade (1) geht über in den Kreis $x_0(u^2 + v^2) - u = 0$,
 die Gerade (2) geht über in den Kreis $y_0(u^2 + v^2) + v = 0$.

Dabei sind u, v die Koordinaten des Bildpunktes $w = f(z)$, also $w = u + jv$. Mittels einfacher Umformungen zeigt man, daß die beiden Kreisgleichungen für $x_0 \neq 0$ bzw. $y_0 \neq 0$ äquivalent sind zu:

$$\left(u - \frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad u^2 + \left(v + \frac{1}{2y_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2y_0}\right)^2 \quad (3.2)$$

Dies sind, wenn man x_0 bzw. y_0 als Parameter auffaßt, Kreisscharen durch den Ursprung mit Mittelpunkten auf der u - bzw. v -Achse.



Begründung der genannten Abbildungseigenschaft:

$$\begin{aligned} w &= f(x_0 + jy) = \frac{1}{x_0 + jy} = \frac{x_0 - jy}{x_0^2 + y^2} \\ \Rightarrow u &= \frac{x_0}{x_0^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x_0^2 + y^2} \\ \Rightarrow u^2 + v^2 &= \frac{1}{x_0^2 + y^2} = \frac{x_0}{x_0(x_0^2 + y^2)} = \frac{u}{x_0} \end{aligned}$$

Durch Umstellung erhält man die 1.Kreisgleichung, die zweite begründet man ähnlich. Elektrotechnische Anwendungen dieser Abbildungseigenschaft werden in den Übungen vorgestellt.

Komplexe Funktionen in Vektorfeld-Darstellung:

Jede Zahl $z = x + jy \in \mathbb{C}$ kann auch als reelles Zahlenpaar (x, y) aufgefaßt werden. In diesem Sinne sind G und $f(G)$ Punktfolgen in \mathbb{R}^2 . Bei dieser „reellen Auffassung“ vermittelt f eine Abbildung von $G \subset \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2 , stellt also praktisch ein **Vektorfeld** der Dimension ($n = 2$) dar. Diese Darstellung als Vektorfeld erhält

man, wenn man z und $w = f(z)$ in Real- und Imaginärteil zerlegt und jeweils als Vektor schreibt:

$$z = x + jy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(z) = u(z) + jv(z) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Damit kann man die Funktion f in der folgenden Form schreiben:

$$f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Wir machen uns dies an einem Beispiel klar.

Beispiel 3.2 :

Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z) = z^2$, wird in ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ umgeschrieben, setze $z = x + jy$ ein:

$$\begin{aligned} w = z^2 &= (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j(2xy) \\ \Rightarrow f(x, y) &= \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der **Grenzwert-** und **Stetigkeitsbegriff** für komplexe Funktionen ist damit auf die entsprechenden Begriffe für Vektorfelder zurückgeführt:

- 1) Sei $a = a_1 + ja_2 \in G \cup \partial G$ und $c = c_1 + jc_2 \in \mathbb{C}$. Definitionsgemäß ist dann $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c$ äquivalent zu $f(x, y) \rightarrow (c_1, c_2)^T$ für $(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)$ und dies ist gleichbedeutend damit, daß gilt:

$$u(x, y) \rightarrow c_1 \text{ und } v(x, y) \rightarrow c_2 \text{ für } (x, y) \rightarrow (a_1, a_2)$$

- 2) Stetigkeit von f in einem Punkt $a \in G$ ist (wie üblich) durch die Gleichung $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ definiert. f ist stetig auf G , wenn f in jedem Punkt $a \in G$ stetig ist.

Die bekannten **Regeln** für Grenzwerte und Stetigkeit können also übernommen werden, insbesondere: Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind ebenfalls stetig.

In obigem Beispiel sind die Funktionen $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2xy$ auf \mathbb{R}^2 stetig, somit ist die Funktion $f(z) = z^2$ auf \mathbb{C} stetig.

3.2 Elementare Funktionen

Einige grundlegende Typen komplexer Funktionen sollen in diesem Abschnitt eingeführt und besprochen werden.

Polynome und rationale Funktionen

Mit festen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, ist ein Polynom vom Grad n durch

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

gegeben. Die wichtigsten Eigenschaften, die für reelle Polynome gelten, treffen auch für komplexe zu:¹ Für zwei Polynome p, q mit $\text{Grad } p \geq \text{Grad } q \geq 1$ gilt der **Divisionssatz**:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = h(z) + \frac{r(z)}{q(z)} \quad \text{mit } \text{Grad } r < \text{Grad } q$$

Ein Polynom p , dessen Grad $n \geq 1$ ist, besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen z_1, \dots, z_k , mit deren Hilfe p in der **Faktorzerlegung**

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{n_k}$$

mit $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ dargestellt werden kann. Dabei ist n_i die Vielfachheit der Nullstelle z_i .

Eine **rationale Funktion** ist als Quotient zweier Polynome p und q definiert, also $f(z) = p(z)/q(z)$. Polynome und rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Die komplexe Exponentialfunktion

In Mathematik A (Unterabschnitt 2.2.5) haben wir die Größe e^{jy} für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$e^{jy} = \cos y + j \sin y$$

Mit Hilfe dieser Beziehung wird die komplexe Exponentialfunktion für beliebiges $z := x + jy \in \mathbb{C}$ wie folgt eingeführt:

$$e^z := e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y) \quad (3.3)$$

¹Die Beweise lassen sich „wörtlich“ übertragen.

Realteil $u(x, y)$ und Imaginärteil $v(x, y)$ der Funktion $f(z) = e^z$ sind also gegeben durch

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

Satz 3.1 Die Exponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

- 1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
- 2) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \quad e^z \neq 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C})$
- 3) $e^{k\pi j} = (-1)^k \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$ insbesondere: $e^{\pi j} = -1, \quad e^{2\pi j} = 1.$
- 4) $e^{z+2\pi j} = e^z \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$ d.h. die Funktion ist $2\pi j$ -periodisch.

BEWEIS: Die Aussage 1) folgt direkt daraus, dass $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$ und $e^{j(y_1+y_2)} = e^{jy_1} e^{jy_2}$ gilt, letzteres nach Satz 2.8 (Mathematik A).

Aus diesem Satz folgt direkt auch die Aussage 2).

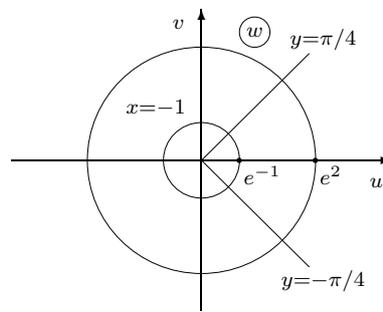
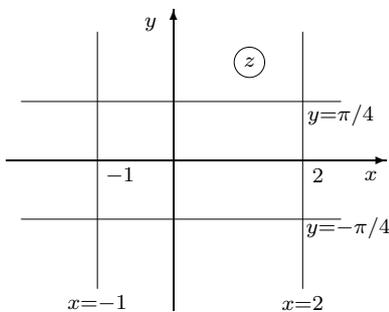
Aus (3.3) erhält man: $e^{k\pi j} = e^0(\cos(k\pi) + j \sin(k\pi)) = (-1)^k.$

Wegen 1) und 3) gilt: $e^{z+2\pi j} = e^z e^{2\pi j} = e^z.$ □

Wir geben eine „einfache“ **Abbildungseigenschaft** der Exponentialfunktion an: Die Zahlen $z = x_0 + jy$ liegen für festes x_0 und variables y auf einer zur y -Achse parallelen Geraden. Die Bildwerte sind durch $w = e^{x_0} e^{jy}$ ($y \in \mathbb{R}$) gegeben; sie durchlaufen ∞ oft einen Kreis um 0 mit Radius e^{x_0} .

Die Zahlen $z = x + jy_0$ liegen für festes y_0 und variables x auf einer zur x -Achse parallelen Geraden. Die Bildwerte $w = e^x e^{jy_0}$ durchlaufen einen von 0 ausgehenden Strahl mit dem Argument y_0 . Es gilt also:

Die Gerade $z = x_0 + jy$ wird auf den Kreis um 0 mit Radius e^{x_0} ,
 die Gerade $z = x + jy_0$ wird auf den Strahl $\arg w = y_0$ abgebildet.



Bemerkung: Wegen $e^{z+2\pi j} = e^z$ ist die Funktion $w = e^z$ ist $2\pi j$ -periodisch. Jeder Streifen der Form

$$S = \{x + jy \mid x \in \mathbb{R}, y_0 < y \leq y_0 + 2\pi\}$$

wird umkehrbar eindeutig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. Insbesondere wird der Streifen F , der durch

$$F = \{x + jy \mid x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\}$$

definiert ist, bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet.

Der komplexe Logarithmus

Zu gegebenem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt eine Zahl w mit $e^w = z$ ein Logarithmus von z . Ist w ein Logarithmus von z , so trifft dies auch auf $w + 2k\pi j$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) zu, denn es gilt: $e^{w+2k\pi j} = e^w$ (Satz 3.1). Nach obigen Ausführungen gibt es genau ein $w \in F$, das die Gleichung $e^w = z$ löst. Ein solches w nennen wir **Hauptwert des Logarithmus** von z und bezeichnen es mit $w = \ln z$. Wir geben nun eine Funktionsvorschrift für den Hauptwert $w = \ln z$ an.

Satz 3.2 Für jedes $z \neq 0$ gilt: $\ln z = \ln |z| + j \arg(z)$. Beachte, daß dabei nach Definition $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ ist.

BEWEIS: Gesucht ist die Lösung $w \in F$, die die Gleichung $e^w = z$ erfüllt, wobei $z \neq 0$ vorgegeben ist. Mit $w := u + jv$ und $z := re^{j \arg(z)}$ ist diese Gleichung äquivalent zur Gleichung $e^u e^{jv} = re^{j \arg(z)}$. Daraus folgt: $e^u = r$, d.h. $u = \ln r$ und $v = \arg(z)$. Somit gilt: $w = u + jv = \ln |z| + j \arg(z)$. \square

Alle Logarithmen einer komplexen Zahl $z \neq 0$ erhält man, indem man zum Hauptwert die Größe $2k\pi j$ hinzuaddiert. Die Menge w_k **aller** Logarithmen von $z \neq 0$ ist also beschrieben durch

$$w_k := \ln |z| + j(\arg(z) + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Die aus dem Reellen gewohnten **Umkehreigenschaften** von Exponentialfunktion und Logarithmus sind im Komplexen mit „Vorsicht“ anzuwenden:

Stets gilt: $e^{\ln z} = z$, dagegen trifft $\ln e^z = z$ nur für solche $z = x + jy$ zu, für die $-\pi < y \leq \pi$ gilt.

Mit Hilfe der \ln -Funktion definiert man **allgemeine Potenzen** zur Basis $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, analog wie im Reellen:

$$a^z := e^{z \ln a} \quad (3.4)$$

Die trigonometrischen Funktionen

Aus der Eulerschen Formel $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ folgt:²

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}), \quad \sin x = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx})$$

Wir benutzen diese Formeln nun, die trigonometrischen Funktionen in die komplexe Ebene fortzusetzen. Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ setzen wir:

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{jz} + e^{-jz}) \quad , \quad \sin z := \frac{1}{2j} (e^{jz} - e^{-jz}) \quad (3.5)$$

Satz 3.3 (Eigenschaften der sin- und cos-Funktion)

1) Es gelten für $z, w \in \mathbb{C}$ die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \end{aligned}$$

2) Für $z = x + jy$ gilt folgende Zerlegung in $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + jy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + jy)$:

$$\begin{aligned} \cos(x + jy) &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \\ \sin(x + jy) &= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \end{aligned}$$

3) $\cos z, \sin z$ sind (wie im Reellen) 2π -periodisch.

4) Durch die Fortsetzung ins Komplexe kommen keine weiteren Nullstellen hinzu, d.h. für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad , \quad \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$$

BEWEIS: Wir wollen uns dabei kurz fassen und die explizite Nachrechnung einiger Beziehungen dem Leser überlassen.

1) Aus (3.5) folgt direkt: $\cos(-z) = \cos z$ und $\sin(-z) = -\sin z$ und außerdem die Eulersche Formel im Komplexen: $e^{jz} = \cos z + j \sin z$. Nach Definition gilt: $\cos(z+w) = \frac{1}{2}(e^{jz}e^{jw} + e^{-jz}e^{-jw})$. Ausnutzen der Eulerschen Formel ergibt das Additionstheorem für $\cos z$.

2) Es gilt $\cos(x + jy) = \cos x \cos(jy) - j \sin x \sin(jy)$ auf Grund des Additionstheorems für $\cos z$. Der Rest folgt daraus, daß man in (3.5) $z = jy$ einsetzt.

²Denn es gilt damit auch: $e^{j(-x)} = \cos x - j \sin x$

$$3) \cos(z + 2\pi) = \frac{1}{2} \left(e^{j(z+2\pi)} + e^{-j(z+2\pi)} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{jz} + e^{-jz} \right) = \cos z. \text{ Benutzt wurde dabei: } e^{j2\pi} = 1 = e^{-j2\pi}.$$

$$4) \cos z = 0 \Leftrightarrow e^{jz} + e^{-jz} = 0 \Leftrightarrow e^{2jz} = -1 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

□

Die hyperbolischen Funktionen

Die im Reellen gültigen Definitionsgleichungen werden in die komplexe Ebene fortgesetzt; wir definieren also:

$$\cosh z := \frac{1}{2} \left(e^z + e^{-z} \right) \quad , \quad \sinh z := \frac{1}{2} \left(e^z - e^{-z} \right) \quad (3.6)$$

Ein Vergleich mit (3.5) zeigt, daß diese Funktionen durch die trigonometrischen Funktionen darstellbar sind:

$$\cosh z = \cos(jz), \quad \sinh z = -j \sin(jz)$$

Hiermit lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen aus denen der trigonometrischen Funktionen ableiten.

- 1) Additionstheoreme gelten wie im Reellen, z.B. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- 2) Wie e^z sind $\cosh z$ und $\sinh z$ $2\pi j$ -periodisch.
- 3) Nullstellen:

$$\cosh z = 0 \iff z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) j \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sinh z = 0 \iff z = k\pi j \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3.3 Holomorphe Funktionen

Komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle z wird zunächst so definiert, wie wir es aus der Analysis von Funktionen einer reellen Variablen gewohnt sind.

Definition 3.1 Die komplexe Funktion f sei in einer Umgebung U von z definiert. Falls der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (3.7)$$

existiert, heißt f in z **komplex differenzierbar** und $f'(z)$ wird **Ableitung** von f in z genannt.

Ist die Ableitung $f'(z)$ für alle z aus einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ vorhanden, so heißt f **holomorph** oder **analytisch** auf G .

- Holomorphie von f bedeutet also, dass f für alle z aus einem Gebiet G komplex differenzierbar ist. Solche Funktionen besitzen viele bemerkenswerte Eigenschaften, deshalb haben sie eine eigene Bezeichnung erhalten.
- An Stelle von „holomorph“ verwenden wir meist die Bezeichnung „analytisch“.

Jede komplexe Funktion $w = f(z)$ kann man - wie bereits dargelegt - auch als Vektorfeld der Dimension $n = 2$ auffassen: $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$. In Mathematik B (Abschnitt 6.8) wurde der Begriff der Differenzierbarkeit eines Vektorfeldes eingeführt und untersucht. Damit stellt sich die Frage, in welchem Zusammenhang dieser Begriff der „reellen Differenzierbarkeit“ mit dem der komplexen Differenzierbarkeit für Vektorfelder steht.

Satz 3.4 (Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit)

Die Funktion $f = u + jv$ sei in einer Umgebung des Punktes $z = x + jy$ definiert. Das Vektorfeld $(u, v)^T$ sei im Punkt (x, y) differenzierbar. Genau dann ist f in z komplex differenzierbar, wenn die so genannten Cauchy-Riemannschen DGLn im Punkt (x, y) gelten:

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad , \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad (3.8)$$

In diesem Fall erhalten wir die komplexe Ableitung aus:

$$f'(x + jy) = u_x(x, y) + jv_x(x, y) \quad (3.9)$$

BEWEIS: Es ist vorausgesetzt, dass $(u, v)^T$ im Punkt (x, y) reell differenzierbar ist. Nach Satz 6.16 (Mathematik B) bedeutet dies, dass für $(x + h_1, y + h_2)$ aus einer Umgebung von (x, y) die folgende Darstellung gilt:

$$\begin{pmatrix} u(x + h_1, y + h_2) \\ v(x + h_1, y + h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(|h|) \\ o_2(|h|) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Der letzte Term erfüllt dabei eine o -Bedingung.

Entsprechende Überlegungen wie im Reellen zeigen (vgl. Mathematik A (3.5)), daß komplexe Differenzierbarkeit von f äquivalent dazu ist, daß folgende Darstellung mit o -Bedingung gilt:

$$f(z + h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|) \quad (3.11)$$

Wir setzen $f'(z) := a + jb$, $h := h_1 + jh_2$. Dann erhalten wir die Beziehung:

$$f'(z)h = ah_1 - bh_2 + j(ah_2 + bh_1)$$

Die Gleichung (3.11) schreiben wir in zwei Gleichungen in Vektorform (eine für den Real-, die andere für den Imaginärteil):

$$\begin{pmatrix} u(x+h_1, y+h_2) \\ v(x+h_1, y+h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(|h|) \\ o_2(|h|) \end{pmatrix}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (3.10), so folgt, daß die Jacobi-Matrix die folgende Gestalt hat:

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) := \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man aber die folgenden Identitäten:

$$u_x(x, y) = a = v_y(x, y) \quad v_x(x, y) = b = -u_y(x, y)$$

$$f'(z) = a + jb = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$$

□

Bekanntlich ist ein Vektorfeld $(u, v)^T$, das auf einem Gebiet G stetige partielle Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y besitzt, auf G total differenzierbar. Damit erhalten wir mit Hilfe von Satz 3.4 ein praktikables Kriterium für den **Nachweis der Holomorphie** einer Funktion f auf G .

Satz 3.5 *Die Funktion $f = u + jv$ sei auf dem Gebiet G definiert. Die Funktionen u und v mögen auf G stetig partiell nach x und y differenzierbar sein. Falls u und v für alle $(x, y) \in G$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, also*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad v_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

erfüllen, dann ist f auf G eine analytische Funktion.

Für den Nachweis der Holomorphie einer Funktion f auf einem Gebiet G und die Berechnung der Ableitung stehen uns zwei Methoden zur Verfügung:

1) Definition 3.1 oder 2) Satz 3.4 bzw. Satz 3.5

Beispiel 3.3 :

1) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := z^2$. Wir verwenden Definition 3.1:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2z+h) = 2z$$

f ist auf \mathbb{C} analytisch und es gilt: $f'(z) = 2z$.

- 2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := e^z$. Wir verwenden Satz 3.5 und beachten dabei, daß $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$ ist. Die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos y & u_y(x, y) &= -e^x \sin y \\ v_x(x, y) &= e^x \sin y & v_y(x, y) &= e^x \cos y \end{aligned}$$

sind stetig auf \mathbb{R}^2 . Man liest ab, daß die Cauchy-Riemannschen DGLn $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt sind, also ist f auf \mathbb{C} analytisch. Man erhält mit Satz 3.4:

$$f'(z) = u_x(x, y) + jv_x(x, y) = e^x \cos y + je^x \sin y = e^x e^{jy} = e^z$$

- 3) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \bar{z}$. Wegen $\bar{z} = x - jy$ erhält man: $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$. Daraus folgt:

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = -1$$

Stets ist $u_x \neq v_y$. Es gibt also kein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, auf dem f analytisch ist.

BEACHTEN: Die Funktion $z \mapsto \bar{z}$ ist nirgends auf \mathbb{C} komplex differenzierbar. Man wird daher nicht erwarten können, dass Funktionen, in denen \bar{z} auftritt, analytisch sind, etwa: $z \mapsto \bar{z}z = |z|^2$ oder $z \mapsto e^{\bar{z}}$.

Nach (3.11) ist komplexe Differenzierbarkeit in z äquivalent damit, daß die Darstellung

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|)$$

gilt. Daraus folgt direkt: $\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) = f(z)$, woraus sich die folgende Implikation ergibt:

Ist f in z komplex differenzierbar, so ist f in z erst recht stetig („komplexe Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit“).

Die folgenden Ableitungsregeln sind von ihrer Form her aus der reellen Analysis bekannt. Sie können analog wie dort begründet werden (vgl. Mathematik A, Abschnitt 3.2).

Satz 3.6 (Rechenregeln für die komplexe Ableitungen) Die Funktionen f, g seien in z komplex differenzierbar. Dann trifft dies auch auf $f + g$, αf , fg und $\frac{f}{g}$ zu ($\frac{f}{g}$ nur, falls $g(z) \neq 0$ ist) und es gelten folgende Formeln:

1. $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$ (Summenregel)
2. $(\alpha f(z))' = \alpha f'(z)$ (konstanter Faktor)

3. $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ (Produktregel)

4. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$ (Quotientenregel)

Ist F in $w = g(z)$ komplex differenzierbar, so gilt die Kettenregel:

$$[F(g(z))]' = F'(g(z))g'(z)$$

Beispiel 3.4 :

1) $(\cos z)' = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})' = \frac{1}{2}(je^{jz} - je^{-jz}) = -\frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}) = -\sin z$

Die Funktion $f(z) = \cos z$ ist auf \mathbb{C} analytisch mit $f'(z) = -\sin z$. Ebenso ist $g(z) := \sin z$ auf \mathbb{C} analytisch mit $g'(z) = \cos z$.

2) $(\cosh z)' = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})' = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sinh z$.

Die Funktion $f(z) = \cosh z$ ist auf \mathbb{C} analytisch mit $f'(z) = \sinh z$. Ebenso ist $g(z) := \sinh z$ auf \mathbb{C} analytisch mit $g'(z) = \cosh z$.

Im folgenden Satz stellen wir die Ableitungen für einige grundlegende Funktionen zusammen.

Satz 3.7 (Die Ableitungen elementarer Funktionen) Jede der folgenden Funktionen f ist auf dem angegebenen Gebiet G analytisch und besitzt dort die Ableitung f' (mit $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$):

f	f'	G	f	f'	G
c	0	\mathbb{C}	$\cos z$	$-\sin z$	\mathbb{C}
z^n	nz^{n-1}	\mathbb{C}	$\sinh z$	$\cosh z$	\mathbb{C}
e^z	e^z	\mathbb{C}	$\cosh z$	$\sinh z$	\mathbb{C}
e^{az}	ae^{az}	\mathbb{C}	$\ln z$	$\frac{1}{z}$	$\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}$
$\sin z$	$\cos z$	\mathbb{C}	$\frac{1}{z^n}$	$\frac{-n}{z^{n+1}}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Die Funktion $f : G := \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$, $f(z) := \ln z = \ln |z| + \arg(z)$ (Hauptwert des Logarithmus) ist entlang des Strahls $\mathbb{R}_- = \{x \mid x \leq 0\}$ unstetig (Sprung um 2π). Daher kann die Funktion in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}_-$ komplex differenzierbar sein. Die Ableitung in den übrigen Punkten z wird in den Übungen hergeleitet.

Zusammensetzungen obiger Funktionen leitet man nach den Ableitungsregeln in gewohnter Weise ab, z.B.:

$$1) f(z) = z^3 + jz^2 - 1 \Rightarrow f'(z) = 3z^2 + 2jz$$

$$2) f(z) = \frac{2z^2 - 1}{z} \Rightarrow f'(z) = \frac{2z^2 + 1}{z^2} \quad (z \neq 0)$$

$$3) f(z) = \sin^2(2z + 1) \Rightarrow f'(z) = 4 \sin(2z + 1) \cos(2z + 1)$$

Ergänzung*:

Ist $f = u + jv$ eine auf G analytische Funktion, so erfüllen u und v auf G die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

Setzt man u, v als \mathcal{C}^2 -Funktionen auf G voraus,³ so folgt:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{und} \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so zeigt sich, dass u die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3.12}$$

Sie wird Laplacesche DGL der Ebene genannt. (Analog erhält man: $v_{xx} + v_{yy} = 0$.) Es gilt also: Real- und Imaginärteil einer auf G analytischen Funktion genügen auf G der Laplaceschen DGL.

Der folgende Satz zeigt, dass unter einer zusätzlichen Voraussetzung auch die Umkehrung gilt.

Satz 3.8 *Die Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ die Laplacesche DGL (3.12). Dann ist u Realteil einer auf G analytischen Funktion $f = u + jv$.*

³Wir werden sehen, daß jede analytische Funktion f auf G beliebig oft differenzierbar ist, so daß diese Voraussetzung überflüssig ist.

BEWEIS: Zu vorgegebenem u wird eine Funktion v gesucht, so daß auf G die Cauchy-Riemannschen DGLn erfüllt sind, nämlich:

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x \quad \text{oder äquivalent:} \quad \text{grad } v = (-u_y, u_x)^T$$

Zu vorgegebenem Feld $\mathbf{h} := (-u_y, u_x)^T$ ist eine solche Gleichung auf G genau dann erfüllbar, wenn die Integrabilitätsbedingungen $h_{1y} = h_{2x} \Leftrightarrow -u_{yy} = u_{xx}$ erfüllt sind. Dies trifft zu, weil die Laplacesche DGL nach Voraussetzung erfüllt sein soll. \square

Beispiel 3.5 :

Man zeige, daß $u(x, y) = x^2 - y^2 - 4y$ Realteil einer auf $G = \mathbb{C}$ analytischen Funktion ist, und berechne den Imaginärteil $v(x, y)$.

Man bestätigt leicht: $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = -2$, also erfüllt u die Laplacesche DGL auf \mathbb{R}^2 . Wir bestimmen die Funktion v aus den Cauchy-Riemannschen DGLn, wobei zu beachten ist, dass u_x , u_y ja bekannt sind:

$$\begin{aligned} v_x = -u_y = 2y + 4 &\implies v(x, y) = 2xy + 4x + c(y) \\ v_y = u_x = 2x &\implies v(x, y) = 2xy + c(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ein Vergleich ergibt: } v(x, y) &= 2xy + 4x + c \\ \implies f(x + jy) &= u(x, y) + jv(x, y) = x^2 - y^2 - 4y + j(2xy + 4x + c) \end{aligned}$$

Die Funktion wird später noch explizit in Abhängigkeit der Variablen z angegeben.

3.4 Isolierte Singularitäten

Wir stellen zunächst ein nützliches Prinzip zur **Berechnung von Grenzwerten** vor, das uns aus der reellen Analysis bekannt ist.

Satz 3.9 (Grenzwertbestimmung nach de l'Hospital)

Die Funktionen f und g seien auf einer Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ von z_0 analytisch mit $f(z_0) = 0 = g(z_0)$. Ist $g'(z_0) \neq 0$, so folgt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Zusatz: Tritt der Fall $f'(z_0) = 0 = g'(z_0)$ ein, und ist $g''(z_0) \neq 0$, so ist der Grenzwert mit $f''(z_0)/g''(z_0)$ identisch, usw.

BEWEIS: Wegen $f(z_0) = 0$ und $g(z_0) = 0$ gilt folgende Identität:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Der Grenzprozeß $z \rightarrow z_0$, durchgeführt an obiger Beziehung, ergibt:

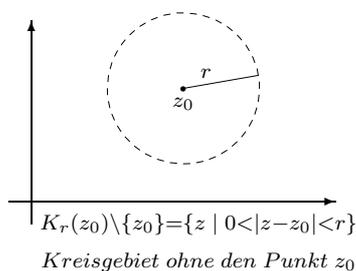
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Durch Wiederholung der Argumentation begründet man den Zusatz. □

Wir wiederholen einige aus dem Reellen bekannte Beispiele:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{\cos 0}{1} = 1 \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Man nennt z_0 eine **isolierte Singularität** (oder **singuläre Stelle**) von f , wenn f in einem Gebiet der Form $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, analytisch, aber in z_0 selbst nicht definiert ist.



Zur Erläuterung vier **Beispiele**: Die isolierten Singularitäten

- 1) von $f(z) := \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-2)}$ sind $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$,
- 2) von $g(z) := \frac{z}{z^2+1}$ sind $z_0 = j$ und $z_1 = -j$,
- 2) von $h(z) := \frac{1}{\sin z}$ sind $z_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),
- 3) von $k(z) := e^{\frac{1}{z}}$ ist $z_0 = 0$.

Es werden drei Typen von isolierten Singularitäten unterschieden: hebbare Singularität, Pol der Ordnung n und wesentliche Singularität.

Definition 3.2 z_0 sei eine isolierte Singularität der Funktion f .

- a) z_0 wird hebbbar genannt, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert.
- b) z_0 heißt Pol der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$), wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ existiert und $\neq 0$ ist.
- c) Im verbleibenden Fall spricht man von einer wesentlichen Singularität.

Die Definition stellt gleichzeitig einen Test dafür dar, welcher Typ von Singularität vorliegt. Um den Test durchführen zu können, muß man aber im Grunde genommen schon vorher eine Vorstellung davon haben, welche Singularität vorliegt. Hilfsmittel dafür werden in den Übungen vorgestellt.

In den **praktisch** wichtigen Fällen kann man sich an die folgenden „Merkregeln“ halten, um Aufschluß über den Typ der Singularität zu gewinnen:

- 1) Quotient $F := f/g$ analytischer Funktionen: Sind f und g analytisch in einer Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a und gilt $g(a) = 0$, so besitzt der Quotient F in a eine hebbare Singularität oder einen Pol.
- 2) Wird z.B. in einer der Funktionen e^z , $\sin z$, $\cos z$ die Variable z durch $1/(z - a)$ substituiert, so ist a eine wesentliche Singularität.

Beispiel 3.6 :

- 1) Formales Anwenden des Tests auf die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{1 - z}{z^2(z^2 + 1)(z + 1)^3}$$

ergibt: $z_0 = 0$ Pol der Ordnung 2, $z_1 = j$ und $z_2 = -j$ Pole der Ordnung 1 (weil $z^2 + 1 = (z - j)(z + j)$ ist), $z_3 = -1$ Pol der Ordnung 3.

Merke: Bei rationalen Funktionen kann man jeden Pol und seine Ordnung direkt aus der vollständigen Faktorzerlegung des Nenners **ablesen**, sofern die Faktoren mit etwaigen gleichen Faktoren des Zählers so weit wie möglich gekürzt sind.

- 2) $f(z) := \frac{z}{1 - e^z}$ besitzt singuläre Stellen in $z_m = 2\pi m j$ ($m \in \mathbb{Z}$). Nach obigen Ausführungen kann es sich nur um hebbare Singularitäten oder Pole handeln.

a) $z_0 = 0$ ist hebbar, denn es gilt:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1 - e^z} = \frac{1}{-e^z} \Big|_{z=0} = -1 \quad (\text{De l'Hospital})$$

b) $z_m = 2\pi m j$ ($m \neq 0$) ist Pol 1. Ordnung, denn:

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi m j} (z - 2\pi m j) \cdot \frac{z}{1 - e^z} = \frac{2z - 2\pi m j}{-e^z} \Big|_{z=2\pi m j} = -2\pi m j \neq 0$$

3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Die Singularität $z_0 = 0$ ist wesentlich. Es gilt nämlich, dass der Limes von $z^n e^{1/z}$ für $z \rightarrow 0$ (wobei n fest, aber beliebig aus \mathbb{N}_0 ist) nicht existiert. Dies trifft zu, weil bereits der reelle Term $x^n e^{1/x}$ für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert besitzt. Dies sieht man ein, wenn man für $e^{1/x}$ die Reihendarstellung

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2! x^2} + \cdots + \frac{1}{n! x^n} + \frac{1}{(n+1)! x^{n+1}} + \cdots$$

einsetzt, die man aus der Taylorreihe von e^u mit der Substitution $u = 1/x$ gewinnt.

3.5 Integration

Eine Parameterdarstellung einer Kurve C in der Ebene \mathbb{R}^2 besitzt nach Kapitel 1 die Gestalt:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T \quad \text{mit } \alpha \leq t \leq \beta$$

Übertragen auf die komplexe Ebene \mathbb{C} ist diese Darstellung gegeben durch:

$$z(t) := x(t) + jy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Der Begriff „Kurve“ wird also im Sinne der Definition 1.1 ($n = 2$) verwendet.

Beispiel 3.7 :

1. Die Parameterdarstellung einer Strecke, die die komplexe Zahl $a := a_1 + j a_2$ mit der Zahl $b := b_1 + j b_2$ verbindet, ist gegeben durch

$$z(t) := a + t(b - a) \quad \text{mit } t \in [0, 1]$$

2. Die Parameterdarstellung eines Kreises mit MP 0 und Radius R lautet:

$$\begin{aligned} z(t) &:= R(\cos t + j \sin t) \\ &= R e^{jt} \text{ mit } t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

3. Die Parameterdarstellung eines Kreises mit Mittelpunkt z_0 und Radius R ist dementsprechend gegeben durch:

$$z(t) = z_0 + R e^{jt} \text{ mit } t \in [0, 2\pi]$$

Definition 3.3 C sei eine Kurve, dargestellt durch $z(t) = x(t) + jy(t)$ mit $\alpha \leq t \leq \beta$. $f = u + jv$ sei eine auf C stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_C f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \dot{z}(t) dt \quad (3.13)$$

komplexes Kurvenintegral (kurz: Integral) von f längs C . An Stelle von $\int_C f(z) dz$ verwendet man auch das Symbol $\int_C f dz$.

Beispiel 3.8 :

1. Sei $f(z) = z^2$ und C sei die Strecke, die $1 - j$ mit $1 + j$ verbindet. Dann erhält man eine Parameterdarstellung von C durch:

$$z(t) = 1 - j + j 2t \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_0^1 z(t)^2 \dot{z}(t) dt \\ &= \int_0^1 (1 - j + j 2t)^2 2j dt \\ &= 2j \int_0^1 (4t - 4t^2 + (4t - 2)j) dt \\ &= 2j \left(\int_0^1 (4t - 4t^2) dt + j \int_0^1 (4t - 2) dt \right) = \frac{4}{3}j \end{aligned}$$

2. Sei $f(z) = \bar{z}$ und C der Halbkreis in \mathbb{C} , der die reelle Zahl R mit der Zahl $-R$ verbindet. Dann ist eine Parameterdarstellung von C gegeben durch: $z(t) = R e^{jt}$ mit $0 \leq t \leq \pi$. Wegen $\overline{z(t)} = R e^{-jt}$ und $\dot{z}(t) = R j e^{jt}$ erhält man:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{\pi} \overline{z(t)} \dot{z}(t) dt = \int_0^{\pi} R e^{-jt} R j e^{jt} dt = R^2 j \int_0^{\pi} dt = \pi R^2 j$$

Bemerkungen :

1) Mit $f = u + jv$, $z = \dot{x} + j\dot{y}$ und $dx = \dot{x} dt$, $dy = \dot{y} dt$ folgt:

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_\alpha^\beta (u + jv)(\dot{x} + j\dot{y}) dt \\ &= \int_\alpha^\beta (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + j \int_\alpha^\beta (v\dot{x} + u\dot{y}) dt \\ &= \int_C u dx - v dy + j \int_C v dx + u dy \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dies ist die Zerlegung des komplexen Integrals in Real- und Imaginärteil.

2) Für eine Kurve C , die sich aus endlich vielen Kurvenstücken C_1, \dots, C_p zusammensetzt, setzt man:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^p \int_{C_k} f(z) dz$$

Bezeichnungen: Eine Kurve $C = \{z(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$ heißt **doppelpunktfrei**, wenn für alle $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt: $z(t_1) \neq z(t_2)$. Sie heißt **geschlossen**, wenn $z(\alpha) = z(\beta)$ ist. Ist sie geschlossen und doppelpunktfrei, so zerteilt sie \mathbb{C} in zwei Gebiete, in ein Innengebiet und ein Außengebiet, die wir kurz das „Innere“ bzw. das „Äußere“ von C nennen. Eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve C heißt **positiv orientiert**, wenn das Innere von C links von C liegt (in Durchlaufrichtung gesehen). Dann benutzen wir folgendes Symbol:

$$\oint_C f(z) dz := \int_C f(z) dz$$

Ein **Beispiel** für eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve ist ein Kreis K (MP a und Radius r), dessen Parameterdarstellung gegeben ist durch: $z(t) = a + re^{jt}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. In dieser Parameterdarstellung ist K positiv orientiert. Den Kreis K kann man (mengenmäßig) auch in der Form

$$K := \{z \mid |z - a| = r\}$$

beschreiben. Man drückt das Kurvenintegral über K daher auch wie folgt aus, wobei positive Orientierung unterstellt wird:

$$\oint_{|z-a|=r} f(z) dz := \int_K f(z) dz \quad (3.15)$$

Beispiel 3.9 :

- 1) Berechne für jedes feste $m \in \mathbb{Z}$ das Kurvenintegral der Funktion $f(z) = (z - a)^m$ über die Kurve K , die in (3.15) gegeben ist. Einsetzen der Parameterdarstellung $z(t) = a + re^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ergibt:

$$\oint_{|z-a|=r} (z - a)^m dz = \int_0^{2\pi} (re^{jt})^m rj e^{jt} dt = r^{m+1} j \int_0^{2\pi} e^{(m+1)jt} dt$$

Für $m \neq -1$ gilt: $\oint_{|z-a|=r} (z - a)^m dz = r^{m+1} j \frac{1}{m+1} e^{(m+1)jt} \Big|_0^{2\pi} = 0$

Für $m = -1$ folgt: $\oint_{|z-a|=r} (z - a)^{-1} dz = j \int_0^{2\pi} dt = 2\pi j$

Ergebnis: $\oint_{|z-a|=r} (z - a)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq -1 \\ 2\pi j, & \text{falls } m = -1 \end{cases}$

- 2) Berechne $\oint_C \bar{z} dz$. Hierin sei C der positiv orientierte Polygonzug durch die Punkte $0, 1, 1 + j, j, 0$. Es sind die Kurvenintegrale über 4 Kurvenstücke (Seiten eines Quadrats) zu berechnen.

$$C_1 : z(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1 : \int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^1 t dt = 1/2$$

$$C_2 : z(t) = 1 + tj, \quad 0 \leq t \leq 1 : \int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - tj)(j) dt = 1/2 + j$$

$$C_3 : z(t) = 1 - t + j, \quad 0 \leq t \leq 1 : \int_{C_3} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - t - j)(-1) dt = -1/2 + j$$

$$C_4 : z(t) = (1 - t)j, \quad 0 \leq t \leq 1 : \int_{C_4} \bar{z} dz = \int_0^1 (-1 + t)j(-j) dt = -1/2$$

$$\implies \int_C \bar{z} dz = \int_{C_1} \bar{z} dz + \int_{C_2} \bar{z} dz + \int_{C_3} \bar{z} dz + \int_{C_4} \bar{z} dz = 2j$$

Die folgenden **Regeln** für das komplexe Kurvenintegral entsprechen denen des reellen Kurvenintegrals und sind völlig analog wie diese zu begründen.

Satz 3.10 f und g seien zwei komplexe Funktionen, die entlang des Kurvenstücks C stetig seien, ferner sei $a \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $\int_C (f + g) dz = \int_C f dz + \int_C g dz, \quad \int_C a f dz = a \int_C f dz$

b) $\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz \quad (\text{für } C = C_1 \oplus C_2)$

c) $\left| \int_C f dz \right| \leq \left(\max_{z \in C} |f(z)| \right) L \quad (L \text{ Länge von } C)$

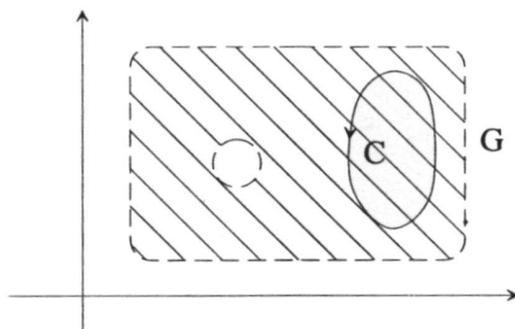
Der folgende von Cauchy stammende Satz wird wegen seiner grundlegenden Bedeutung häufig als **Hauptsatz** der Funktionentheorie bezeichnet. Dabei wollen wir eine geschlossene, doppeltpunktfreie Kurve **einfach geschlossen** nennen.

Satz 3.11 (Cauchyscher Integralsatz)

f sei auf dem Gebiet *G* analytisch. Für jede einfach geschlossene Kurve *C* in *G*, deren Inneres ganz zu *G* gehört, gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (3.16)$$

Beachte: Die Voraussetzung schließt ein, daß *f* im Inneren von *C* überall definiert und analytisch ist. Insbesondere dürfen im Inneren von *C* keine isolierten Singularitäten der Funktion *f* liegen.



BEWEIS: Setzt man $f'(z)$ als stetig ⁴ auf *G* voraus, so läßt sich die Behauptung leicht als Folgerung aus dem Stokesschen Integralsatz für die Ebene gewinnen (vgl. (2.9)). Für ein C^2 -Feld \mathbf{g} mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))^T$ gilt danach:

$$\int_C g_1 dx + g_2 dy = \int \int_F (g_{2x} - g_{1y}) dx dy \quad (3.17)$$

wobei die Kurve *C* den Bereich *F* berandet. Wir wenden diese Formel auf den Real- und Imaginärteil von $\int_C f dz$ an (sh. (3.14)):

$$\begin{aligned} \int_C u dx - v dy &= \int \int_F (-v_x - u_y) dx dy = 0 \\ \int_C v dx + u dy &= \int \int_F (u_x - v_y) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichheit mit null gilt wegen der CR-DGLn: $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. □

⁴An sich ist diese Voraussetzung überflüssig, weil sich zeigen wird, daß eine auf *G* analytische Funktion *f* auf *G* beliebig oft differenzierbar ist, folglich ist jede Ableitung stetig auf *G*.

Beispiel 3.10 :

$f(z) = \frac{1}{z}$ ist analytisch auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wählt man als Kurve den Kreis $|z| = r$ (mit $r > 0$), so liegt im Inneren der geschlossenen Kurve die Singularität $z_0 = 0$. Es sind also die Voraussetzungen des Satzes verletzt. Tatsächlich gilt nach Beispiel 3.9, 1) (mit $a := 0$, $m = -1$):

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi j$$

Wählt man dagegen für C den Kreis $|z - 2| = 1$, so ist f im Innengebiet der Kurve analytisch. Aus dem Satz folgt daher:

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z} dz = 0$$

Aus dem Satz ergeben sich einfache, hinreichende Bedingungen für die **Wegunabhängigkeit** des Kurvenintegrals.

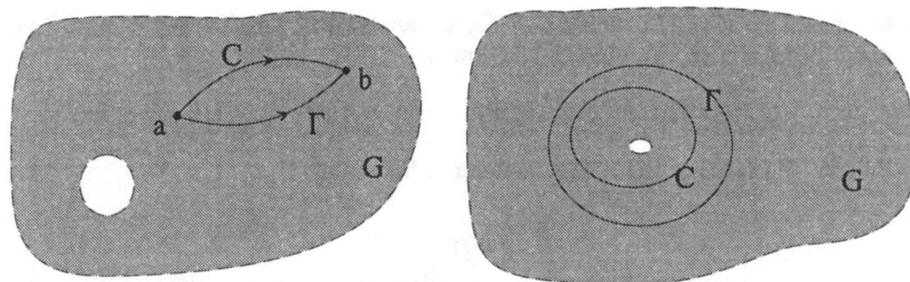
Satz 3.12 f sei eine auf dem Gebiet G analytische Funktion.

- 1) Γ und C seien zwei Kurven in G , die beide den Anfangspunkt a mit dem Endpunkt b verbinden. Falls das Innere von $\Gamma \oplus C_*$ ganz zu G gehört, dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

- 2) Γ und C seien nun zwei einfach geschlossene Kurven in G , so daß der gesamte Bereich „zwischen“ C und Γ ganz zu G gehört (wobei C und Γ positiv orientiert seien). Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_C f(z) dz$$



BEWEIS:

- 1) Da $C \oplus \Gamma_*$ einfach geschlossen ist, folgt mit dem Cauchyschen Integralsatz:

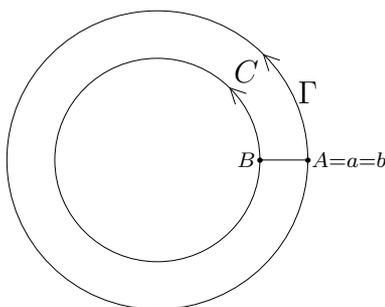
$$0 = \int_{C \oplus \Gamma_*} f dz = \int_C f dz + \int_{\Gamma_*} f dz = \int_C f dz - \int_{\Gamma} f dz$$

- 2) A sei ein Punkt auf Γ , B sei einer auf C , so wie in der Skizze dargestellt. \overline{AB} sei die Strecke, die A mit B verbindet, analog ist \overline{BA} zu verstehen. Mit $A = a = b$ folgt aus Teil 1):

$$\int_{\Gamma} f dz = \int_{\overline{AB}} f dz + \int_C f dz + \int_{\overline{BA}} f dz = \int_C f dz$$

Denn das Integral über \overline{AB} hebt sich mit jenem über \overline{BA} weg.

□



Beispiel 3.11 :

Es wird die auf $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytische Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ betrachtet.

- 1) Die beiden Kurven C_1 und C_2 , definiert durch $z(t) = e^{jt}$, $0 \leq t \leq \pi/2$ bzw. $z(t) = e^{-jt}$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$, verbinden die Zahlen 1 und j . Zwischen den beiden Kurven liegt aber der Punkt 0, der nicht zu G gehört.

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^{jt}} (je^{jt}) dt = j \int_0^{\pi/2} dt = j \frac{\pi}{2}$$

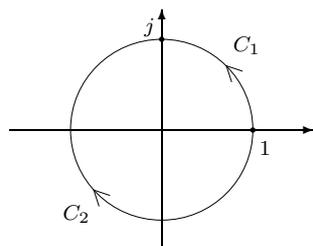
$$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{e^{-jt}} (-je^{-jt}) dt = -j \int_0^{3\pi/2} dt = -j \frac{3\pi}{2}$$

- 2) Γ_1 sei der Polygonzug, der die Punkte $1, 1 + j, j$ verbindet, und Γ_2 jener, der die Punkte $1, 1 - j, -1 - j, -1 + j, j$ durchläuft. Nach obigem Satz, Teil 1) und vorangehendem Beispiel gilt:

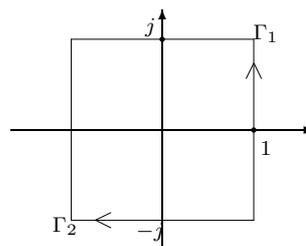
$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz = j \frac{\pi}{2}, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = -j \frac{3\pi}{2}$$

- 3) Sei C eine einfach geschlossene Kurve, in deren Inneren 0 liegt. Nach obigem Satz, Teil 2, und wegen Beispiel 3.9,1) folgt:

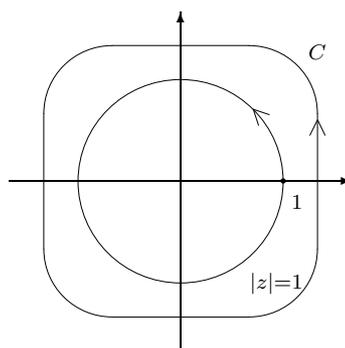
$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi j$$



Skizze zu 1)



Skizze zu 2)



Skizze zu 3)

G sei ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Eine auf G analytische Funktion F heißt Stammfunktion von f auf G , wenn gilt:

$$F'(z) = f(z) \quad (\text{für alle } z \in G)$$

Satz 3.13 (Integration mittels einer Stammfunktion)

G sei ein Gebiet in \mathbb{C} und f sei analytisch auf G .⁵ Für jede Kurve C in G ist das Integral $\int_C f(z) dz$ genau dann unabhängig von C , wenn f auf G eine Stammfunktion F besitzt. Dann gilt, wenn a Anfangs- und b Endpunkt von C ist:

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a)$$

⁵Der Beweis zeigt, daß man f nur als stetige Funktion voraussetzen müßte.

BEWEIS:

- 1) Zunächst gehen wir davon aus, daß f auf G eine Stammfunktion F besitze. C sei durch $z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, dargestellt. Es ist $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$. Da $\frac{d}{dt}F(z(t)) = F'(z(t))\dot{z}(t)$ ist, folgt:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\dot{z}(t) dz = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(z(t))dt = F(z(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(b) - F(a)$$

Dies zeigt, daß das Kurvenintegral von C unabhängig ist.

- 2) Es werde nun vorausgesetzt, daß das Integral von C unabhängig sei. Sei mit a der Anfangs-, mit z der variable Endpunkt von C bezeichnet. Setze

$$F(z) := \int_a^z f(\xi) d\xi$$

und betrachte den Differenzenquotienten:

$$\frac{1}{h} [F(z+h) - F(z)] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi$$

Wir verbinden z und $z+h$ mit der Strecke $\xi(t) = z+th$, $0 \leq t \leq 1$. Wegen $\dot{\xi}(t) = h$ folgt nun, da f stetig ist:

$$\frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h dt = \int_0^1 f(z+th) dt \rightarrow f(z) \quad (\text{für } h \rightarrow 0)$$

Also: $F'(z) = f(z)$.

□

Der Satz wird mit Hilfe eines einfachen **Beispiels** erläutert:

Betrachte die auf \mathbb{C} analytische Funktion $f(z) := ze^z$. Durch Produktintegration erhält man (genau wie im Reellen) folgende Stammfunktion: $F(z) = (z-1)e^z$. Ist nun C eine (beliebige) Kurve, die beispielsweise die Punkte 1 und πj verbindet, so gilt für das Kurvenintegral:

$$\int_C ze^z dz = (\pi j - 1)e^{\pi j} - 0 = 1 - \pi j$$

Wann besitzt f auf G eine Stammfunktion? Eine **hinreichende Bedingung** für die Existenz einer Stammfunktion läßt sich leicht finden.

Satz 3.14 *Ist f auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G von \mathbb{C} analytisch, dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.*

BEWEIS: C und Γ seien zwei Kurven in G , die a und b verbinden. Da G einfach zusammenhängend ist, gehört das Innere von $C \oplus \Gamma_*$ zu G . Satz 3.12 impliziert nun: $\int_C f(z) dz = \int_\Gamma f(z) dz$. Auf Grund der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals besitzt f eine Stammfunktion auf G nach Satz 3.13. □

Beispiel 3.12 :

- 1) $f(z) = \frac{1}{z}$ ist analytisch auf $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aus Beispiel 3.11, 1) wissen wir, daß die Wegunabhängigkeit von $\int_C \frac{1}{z} dz$ auf G nicht gewährleistet ist. Also besitzt f auf G keine Stammfunktion. Bekannt ist, daß f auf $G_- = \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}$ die Stammfunktion $F(z) = \ln z + c$ besitzt (Satz 3.7). Ist C eine Kurve in G_- mit Anfangspunkt a und Endpunkt b , so gilt:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \ln b - \ln a$$

- 2) $h(z) = \frac{1}{z^2}$ ist analytisch auf $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Ableitungsregeln ergeben, daß $H(z) = -\frac{1}{z} + c$ eine Stammfunktion von h auf G ist. Für eine Kurve C in G , die a mit b verbindet, sowie für eine einfach geschlossene Kurve Γ , die in G verläuft, gilt:

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad \oint_{\Gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

- 3) Für das „unbestimmte Integral“ benutzt man dasselbe Symbol wie im Reellen; man verwendet auch entsprechende Integrationsregeln (Produktintegration, Substitutionsregel):

$$\int e^z dz = e^z + c, \quad \int ze^z dz = (z-1)e^z + c, \quad \int (z^2+1)^3 z dz = \frac{1}{8}(z^2+1)^4 + c$$

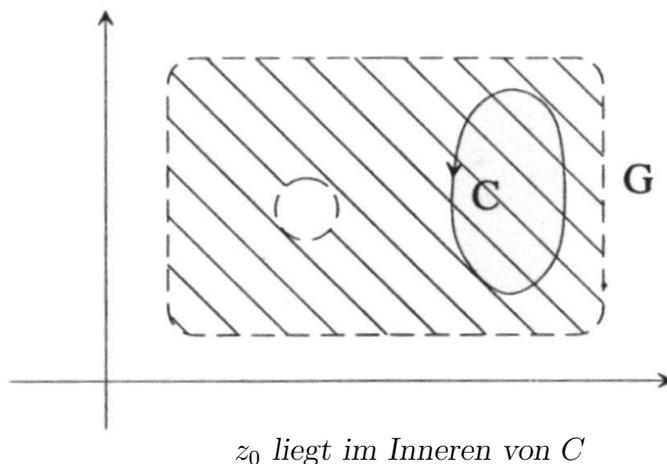
Wir wenden uns nun einer Aussage von Cauchy zu, die zu den bemerkenswertesten der komplexen Analysis gehört.

Satz 3.15 (Integralformel von Cauchy)

Die Funktion f sei analytisch auf dem Gebiet G . C sei eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in G , so daß das Innere von C ganz zu G gehört. Dann gilt für jedes z_0 aus dem Inneren von C :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Der Satz ist deshalb überraschend, weil er besagt, daß die Funktion f im Inneren von C bereits vollständig durch die Werte $f(z)$ auf der berandenden Kurve C festgelegt ist.



BEWEIS: Sei $r > 0$ so, daß der Kreis $|z - z_0| = r$ (a fest) im Inneren von C liege. Dieser Kreis besitzt dann die Parameterdarstellung: $z(t) = z_0 + re^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Mit Satz 3.12 folgt:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{jt})}{re^{jt}} rje^{jt} dt = j \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{jt}) dt$$

Dieses letzte Integral ist unabhängig von r , für $r \rightarrow 0$ strebt der Ausdruck gegen den Wert $2\pi j f(z_0)$, somit:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0)$$

□

Beispiel 3.13 :

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + 3)^2}{z} dz = 2\pi j f(0) = 18\pi j \quad (\text{mit } f(z) := (z^2 + 3)^2)$$

$$2) \oint_{|z-1|=1} \frac{(z^2 + 3)^2}{z - 1} dz = 2\pi j f(1) = 32\pi j \quad (f(z) \text{ wie in 1)).}$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z+1)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z} dz - \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z+1} dz = 2\pi j e^0 - 2\pi j e^{-1}$$

3.6 Potenzreihen und Taylorentwicklung

3.6.1 Potenzreihen im Komplexen

Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \alpha_k + j\beta_k$ eine komplexe Zahlenfolge. Dann erhalten wir eine Reihe komplexer Zahlen durch

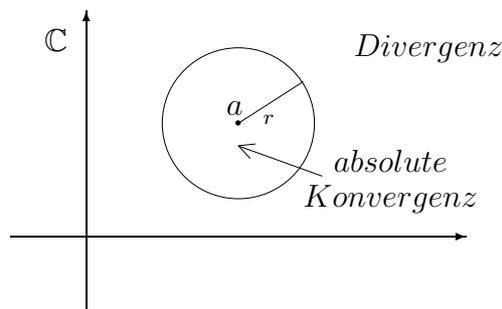
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k + j \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \quad (3.18)$$

Die Reihe $\sum a_k$ ist konvergent dann und nur dann, wenn $\operatorname{Re}(\sum a_k) := \sum \alpha_k$ und $\operatorname{Im}(\sum a_k) := \sum \beta_k$ konvergent sind. Andernfalls ist sie divergent. Sie heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_k|$ konvergent ist. Wegen $|a_k| = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ erhält man: $|a_k| \geq |\alpha_k|, |\beta_k|$. Somit folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum a_k$ jene der Reihen $\sum \alpha_k$ und $\sum \beta_k$. Auch für komplexe Reihen folgt somit aus absoluter Konvergenz die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne.

Betrachtet wird nun für ein festes $z_0 \in \mathbb{C}$ die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.19)$$

Gibt es überhaupt ein $z \neq z_0$, für das diese Reihe konvergiert, so gibt es ein $r > 0$, so daß die Reihe für alle z mit $|z - z_0| < r$ absolut konvergiert und für alle z mit $|z - z_0| > r$ divergiert. (Der Fall $r = \infty$ ist möglich.) Die Begründung verläuft analog zur entsprechenden Aussage reeller Potenzreihen (vgl. Math B, Satz 2.12). Der Begriff „Konvergenzintervall“ ist nun durch „**Konvergenzkreis**“ zu ersetzen.



Für die Reihe (3.19) kann also nur einer der folgenden Fälle eintreten:

- 1) Die Reihe konvergiert nur für $z = z_0$; wir setzen dann $r := 0$.
- 2) Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$; in diesem Fall setzen wir $r := \infty$.

- 3) Es gibt ein $r > 0$, so daß die Reihe für z mit $|z - z_0| < r$ konvergiert und für z mit $|z - z_0| > r$ divergiert. (Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = r$ (Kreisrand) ist keine allgemein gültige Aussage möglich.)

Die Zahl r heißt **Konvergenzradius** und, falls $r \neq 0$ ist, wird das Gebiet $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ **Konvergenzgebiet** der Reihe genannt. Falls $a_k \neq 0$ für alle k ist und die Grenzwerte existieren (auch im uneigentlichen Sinne), so gilt:

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{bzw.} \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

Bekannt ist uns bereits die **geometrischen Reihe**; sie lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z} \quad (\text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1)$$

3.6.2 Eigenschaften von Potenzreihen

Es werden nun wichtige Eigenschaften einer Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (3.20)$$

formuliert. Ihre Begründung kann aus dem Reellen übernommen werden. Der interessierte Leser möge die Beweise der entsprechenden Sätze (vgl. Mathematik B, Satz 4.4 bis 4.6) aus der reellen Analysis auf komplexe Potenzreihen übertragen.

Satz 3.16 (Integration einer Potenzreihe)

Liegt die Kurve C im Konvergenzgebiet $K_r(z_0)$ der Potenzreihe (3.20), so darf diese gliedweise integriert werden, also:

$$\int_C f(z) dz = \int_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C (z - z_0)^k dz$$

Das Ergebnis gilt entsprechend auch für unbestimmte Integrale.

Satz 3.17 (Differentiation einer Potenzreihe)

Die Potenzreihe (3.20) ist auf ihrem Konvergenzgebiet $K_r(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}, \quad f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (z - z_0)^{k-2}, \quad \text{usw.}$$

Die abgeleiteten Reihen haben alle den Konvergenzradius r . Insbesondere: f, f', \dots sind auf $K_r(z_0)$ analytisch. Ferner lassen sich die Koeffizienten a_k wie folgt durch die Ableitungen ausdrücken:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (\text{für } k \in \mathbb{N}_0)$$

Das Konvergenzverhalten von **Potenzreihen mit negativem Exponenten**, also von Reihen der Form

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (3.21)$$

läßt sich durch die Substitution $w = \frac{1}{z - z_0}$ auf jenes gewöhnlicher Potenzreihen zurückführen. Durch Einsetzen in (3.21) bekommen wir:

$$H(w) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k \quad (3.22)$$

Ist r der Konvergenzradius von (3.22), so folgt auf Grund folgender Äquivalenzen

$$|w| < r \iff \frac{1}{|z - z_0|} < r \iff |z - z_0| > \frac{1}{r} =: R$$

daß die Reihe (3.21) auf einem Außenkreisgebiet $|z - z_0| > R$ konvergiert und für $|z - z_0| < R$ divergiert. Offenbar gilt:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} \quad \text{bzw.} \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}$$

falls die Grenzwerte, auch im uneigentlichen Sinn, existieren. Die Integration und Differentiation der Reihe (3.21) auf ihrem Konvergenzgebiet $|z - z_0| > R$ ist in gewohnter Weise vorzunehmen:

$$\int_C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} \right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^k}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k b_k}{(z - z_0)^{k+1}}$$

3.6.3 Die Taylorreihe einer analytischen Funktion

Satz 3.18 (Taylorreihe) Die Funktion f sei auf dem Gebiet G analytisch und z_0 sei eine beliebige Zahl aus G . Ferner sei $K_r(z_0)$ das größte Kreisgebiet, das ganz in G liegt. Dann besitzt f für jedes $z \in K_r(z_0)$ die Potenzreihendarstellung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad (3.23)$$

Insbesondere folgt daraus, dass f auf G beliebig oft differenzierbar ist.

BEWEIS: z liege innerhalb des Kreises $\{s \mid |s - z_0| < r\}$. Dann folgt:

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{s - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}} = \frac{1}{s - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^k \quad (3.24)$$

Verwendet wurde hierbei die Summenformel für die geometrische Reihe, was möglich ist, weil $|z - z_0| < |s - z_0|$ ist. Wir benutzen nun die Cauchysche Integralformel (3.15), in die wir (3.24) einsetzen:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|s - z_0| = r} \frac{f(s)}{s - z} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|s - z_0| = r} \left[f(s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(s - z_0)^{k+1}} \right] ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{|s - z_0| = r} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds \right] (z - z_0)^k \end{aligned}$$

Setzt man hierin

$$a_k := \frac{1}{2\pi j} \oint_{|s - z_0| = r} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds \quad (3.25)$$

so ist die Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$ gewonnen. Aus der Herleitung geht hervor, dass die Potenzreihe für jedes $z \in K_r(z_0)$ konvergiert. Da nach Satz 3.17 Potenzreihen auf ihrem Konvergenzgebiet beliebig oft differenzierbar sind, trifft dies auch auf f zu; ferner gilt nach diesem Satz: $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Setzt man $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ in die Beziehung (3.25) ein, so erhält man das folgende Resultat.

Korollar 3.1 Die Funktion f sei analytisch auf dem Gebiet G und z_0 sei eine beliebige Zahl aus G . Das Kreisgebiet $K_r(z_0)$ liege ganz in G . Dann besitzt die Ableitung $f^{(k)}(z_0)$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Darstellung:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi j} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad (3.26)$$

Aus der Beziehung $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$ folgt: Wird eine Funktion f auf dem Kreisgebiet $K_r(z_0)$ durch die Potenzreihe $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ dargestellt, so ist diese notwendig ihre Taylorreihe an der Stelle z_0 .

Beispiel 3.14 :

- 1) Betrachte die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$, die für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert ist. Nun gilt: $f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z$, $f''(z) = e^z$, \dots , $f^{(k)}(z) = e^z$, \dots . Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(0) = 1$. Deshalb ist die Taylorreihe von f an der Stelle $z_0 = 0$ gegeben durch:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

- 2) Die Entwicklung der Funktion $f(z) = \cos z$ an der Stelle $z_0 = 0$ kann genau so wie im Reellen vorgenommen werden: Aus den Ableitungen $f'(z) = -\sin z$, $f''(z) = -\cos z$, $f'''(z) = \sin z$, $f^{(4)}(z) = \cos z$, folgt: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$ usw. Einsetzen in die Taylorformel ergibt:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Eine Alternative dazu besteht darin, die Taylorreihe von e^z (s. 1)) zu nutzen:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (\text{für } z \in \mathbb{C})$$

Daraus erhält man die Taylorreihe für $\cos z$ an der Stelle $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{jz} + e^{-jz}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jz)^k}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + jz + \frac{(jz)^2}{2!} + \frac{(jz)^3}{3!} + \dots + 1 - jz + \frac{(jz)^2}{2!} - \frac{(jz)^3}{3!} + \dots \right) \\ &\quad (\text{Beachte: } j^2 = -1, j^4 = 1, j^6 = -1, j^8 = 1 \dots) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Die Taylorreihe für $\sin z$ um z_0 begründet man ähnlich wie die für $\cos z$; man erhält:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

3) Die geometrische Reihe $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ (für $|z| < 1$) ist die Taylorreihe von $f(z) = \frac{1}{1-z}$ an der Stelle $z_0 = 0$.

4) Die nach 3) gültige Reihendarstellung

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \quad (|z| < 1)$$

wird nach z integriert:

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \dots + c$$

Setzt man $z = 0$ ein, so zeigt sich, daß $c = 0$ ist.

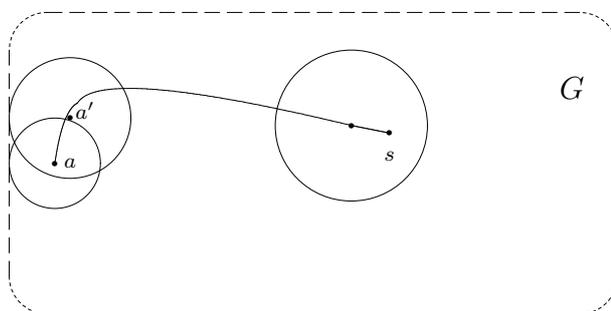
Man beachte, daß die Taylorreihen der obigen Funktionen um den Punkt $z_0 = 0$ **dieselbe Form** besitzen wie die Taylorreihen der entsprechenden **reellen** Funktionen um den Punkt $x_0 = 0$.

Satz 3.19 (Identitätssatz für analytische Funktionen) *f und g seien auf einem Gebiet G analytisch. Stimmen die beiden Funktionen auch nur auf einer unendlichen Menge der Form $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset G$, die einen Häufungspunkt a in G besitzt, überein, so sind f und g völlig identisch, d.h. es ist $f = g$ auf G .*

BEWEIS: Wir nehmen an, (z_n) konvergiere gegen a . (Sonst nimmt man eine gegen a konvergente Teilfolge von (z_n) .) Sei $K_r(a)$ das größte Kreisgebiet um a , das noch zu G gehört, und $f(z) = \sum a_k(z-a)^k$ und $g(z) = \sum b_k(z-a)^k$ seien die Taylorreihen von f bzw. g an der Stelle a . Wegen $f(z_n) = g(z_n) \forall n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$a_0 + a_1(z_n - a) + a_2(z_n - a)^2 + \dots = b_0 + b_1(z_n - a) + b_2(z_n - a)^2 + \dots \quad (3.27)$$

Läßt man hierin $z_n \rightarrow a$ streben, so folgt: $a_0 = b_0$. Streicht man nun a_0, b_0 in (3.27) und kürzt durch $(z_n - a)$, so erhält man $a_1 = b_1$, wenn man $z_n \rightarrow a$ streben läßt. So fortfahrend ergibt sich $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit sind die Taylorreihen $f(z) = \sum a_k(z-a)^k$ und $g(z) = \sum b_k(z-a)^k$, also auch f und g auf $K_r(a)$ identisch. Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $s \in G$ und verbinden a und s mit einer Kurve C . Sei a' der Schnittpunkt der Kurven C und $|z-a| = r$. Dann gibt es eine Folge $(z'_n) \subset K_r(a)$ mit $z'_n \rightarrow a'$. Sei $K_{r'}(a')$ das größte Kreisgebiet um a' , das noch ganz in G liegt. Da $f(z'_n) = g(z'_n)$ für alle n gilt, folgt analog zu oben, daß $f = g$ auf $K_{r'}(a')$ ist. Man mache sich klar, daß man nach endlich vielen Schritten ein Kreisgebiet erhält, das s enthält, so daß $f(s) = g(s)$ folgt. Da s beliebig aus G ist, hat man $f = g$ gezeigt.



□

Man kann den Satz auch so **interpretieren**: Eine auf G analytische Funktion ist durch ihre Werte auf einer „winzigen Teilmenge“ von G (die mindestens eine Menge der im Satz beschriebenen Form umfaßt) vollständig auf der gesamten Menge G bestimmt.

Folgerungen:

- 1) Stimmen zwei auf G analytische Funktionen f und g auf einer Kurve $C \subset G$ überein, so sind sie überhaupt identisch.
- 2) Es gibt höchstens eine analytische Funktion f , die mit einer gegebenen reellen Funktion auf einem reellen Intervall $\alpha < x < \beta$ übereinstimmt.

Beispiel 3.15 :

Wir greifen Beispiel 3.5 auf. Dort haben wir $u(x, y) = x^2 - y^2 - 4y$ vorgegeben und gezeigt, dass u Realteil einer auf $G = \mathbb{C}$ analytischen Funktion ist. Wir haben den Imaginärteil $v(x, y)$ mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen DGLn bestimmt als folgende Funktion: $v(x, y) = 2xy + 4x + c$.

Die folgende Funktion ist also eine auf \mathbb{C} analytische Funktion:

$$f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y) = x^2 - y^2 - 4y + j(2xy + 4x + c)$$

Setzt man hierin $y = 0$, so erhält man die auf \mathbb{R} definierte Funktion $f(x) = x^2 + 4jx + cj$. Wir setzen diese Funktion in die komplexe Ebene fort und erhalten so die folgende Funktion, die auf \mathbb{C} analytisch ist:

$$f_1(z) = z^2 + 4jz + cj$$

Da die Funktionen f und f_1 auf \mathbb{C} analytisch sind und auf \mathbb{R} dieselben Funktionswerte besitzen, sind sie nach dem Identitätssatz überhaupt identisch. Es gilt also: $f = f_1$ auf \mathbb{C} .

3.7 Laurentreihen und Residuenkalkül

Für $m \in \mathbb{Z}$ seien Zahlen $a_m \in \mathbb{C}$ sowie ein $z_0 \in \mathbb{C}$ vorgegeben. Eine Reihe der Form

$$S(z) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z - z_0)^m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \tag{3.28}$$

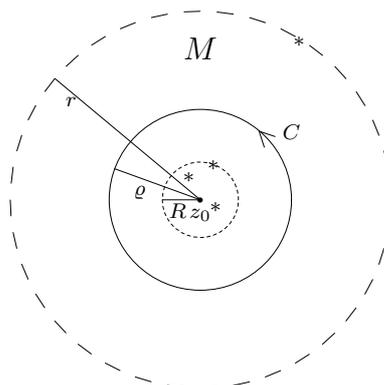
heißt **Laurentreihe** mit Zentrum z_0 . Das Konvergenzgebiet der ersten Reihe hat die Form $|z - z_0| < r$, das der zweiten Reihe die Gestalt $|z - z_0| > R$. Das Konvergenzgebiet der Reihe (3.28) muß, sofern es nicht leer ist, also die Form eines **Kreisringes**

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid R < |z - z_0| < r\} \tag{3.29}$$

um z_0 mit Innenradius R und Außenradius r besitzen. (Die Fälle $R = 0$ oder $r = \infty$ sind möglich.) Auf ihrem Konvergenzgebiet definiert die Laurentreihe eine analytische Funktion S .

3.7.1 Darstellung durch Laurentreihen

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, daß eine auf einem Kreisring analytische Funktion mit Hilfe einer Laurentreihe darstellbar ist. M sei wie in (3.29) gegeben mit festen Zahlen R, r mit $0 \leq R < r \leq \infty$. (Der uns interessierende Fall ist, daß f im Bereich $|z - z_0| \leq R$ „Singularitäten“ besitzt.)



Satz 3.20 (Darstellungssatz nach Laurent)

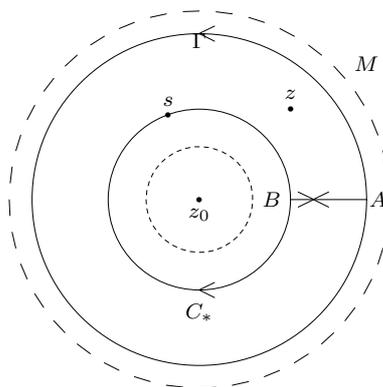
Jede auf einem Ringgebiet M (mit Mittelpunkt z_0) analytische Funktion f läßt sich für jedes $z \in M$ als Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(z - z_0)^m := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \tag{3.30}$$

darstellen. Die Koeffizienten der Laurentreihe sind eindeutig bestimmt durch:

$$a_m = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|s-z_0|=\varrho} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{m+1}} ds \quad (3.31)$$

BEWEIS: Sei $z \in M$. ϱ_1, ϱ_2 seien so gewählt, daß $R < \varrho_1 < |z| < \varrho_2 < r$ ist. C bzw. Γ seien die positiv orientierten Kreise $|s-z_0| = \varrho_1$ und $|s-z_0| = \varrho_2$. K sei nun der in der Skizze dargestellte Integrationsweg: $K = \Gamma \oplus \overline{AB} \oplus C_* \oplus \overline{BA}$



Nach der Integralformel von Cauchy (Satz 3.15) gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_K \frac{f(s)}{s-z} ds \quad (3.32)$$

Die Integration über \overline{AB} und \overline{BA} hebt sich auf. Ersetzt man den Integrationsweg C_* durch C , so muß man das Vorzeichen ändern. Also kann man (3.32) so schreiben:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds}_{=:p_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(s)}{s-z} ds}_{=:p_2(z)}$$

Für $s \in \Gamma$ gilt nun nach dem Beweis des Taylorschen Satzes:

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}$$

Eingesetzt in $p_1(z)$ liefert:

$$p_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \right]}_{=:a_n} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Für $s \in C$ erhält man unter Beachtung von $|(s-z_0)/(z-z_0)| < 1$ analog:

$$\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

Einsetzen in $p_2(z)$ liefert:

$$p_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}} ds \right]}_{=: a_{-n}} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

□

Wie aus der Beweisführung hervorgeht, ist die Laurentreihen-Darstellung von $f(z)$ bei vorgegebenem Ringgebiet M (mit Zentrum z_0) **eindeutig** bestimmt. Da die **praktische Bestimmung** der Koeffizienten a_m nur selten mit der Formel (3.31) mit Erfolg durchgeführt werden kann (weil die Kurvenintegrale i.a. nur schwer zu berechnen sind), verwendet man häufig „andere Methoden“ zur Herleitung der Laurentreihe von $f(z)$.

Beispiel 3.16 :

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ ist auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ analytisch. Wir können $f(z)$ wie folgt schreiben (PBZ):

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

- 1) Die Laurentreihe von f auf dem Ringgebiet $0 < |z| < 1$ um $z_0 = 0$ von ist der Form:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Benutzt man für $(z+1)^{-1}$ die Darstellung mittels geometrischer Reihe, so folgt:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots \quad (|z| < 1)$$

Also: $a_{-1} = 1, a_0 = -1, a_1 = 1, \dots, a_{-n} = 0$ für $n \geq 2$.

- 2) Die Laurentreihe von f auf dem Ringgebiet $0 < |z+1| < 1$ um $z_0 = -1$ besitzt die Form:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (z+1)^m$$

Wiederum unter Verwendung der geometrischen Summenformel bekommen wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= -\frac{1}{1-(z+1)} = -\left[1 + (z+1) + (z+1)^2 + (z+1)^3 + \dots\right] \\ \implies f(z) &= -\left[\frac{1}{z+1} + 1 + (z+1) + (z+1)^2 + \dots\right] \end{aligned}$$

Also: $b_{-1} = -1, b_m = 1 (\forall m \geq 0), b_{-k} = 0 (\forall k \geq 2)$.

- 3) Leite nun die auf dem Ringgebiet $|z| > 1$ um $z_0 = 0$ gültige Laurentreihe von f her, die von der Gestalt ist:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^m$$

Es gilt: $\frac{1}{z+1} = \frac{1/z}{1+1/z} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right)$

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \dots \quad (|z| > 1)$$

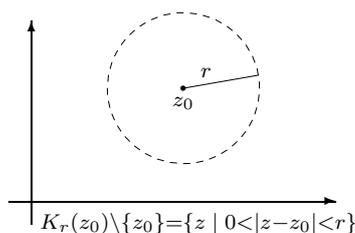
Also: $c_m = 0$ ($\forall m \geq -1$), $c_{-2} = 1$, $c_{-3} = -1$, usw.

3.7.2 Klassifikation von Singularitäten

In diesem Unterabschnitt betrachten wir den wichtigen Spezialfall, dass f in z_0 eine isolierte Singularität besitzt, um die nun f in eine Laurentreihe entwickelt werden soll. Wir können dann f nach Satz 3.20 auf einem Gebiet $0 < |z - z_0| < r$ als Laurentreihe darstellen:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m := \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}}_{2)} \quad (3.33)$$

In dieser Entwicklung bezeichnet man die Reihe 2) als Hauptteil der Laurentreihe.



Satz 3.21 (Charakterisierung einer isolierten Singularität)

Die isolierte Singularität z_0 mit der Laurent-Entwicklung (3.33) ist genau dann

- hebbar, wenn der Hauptteil verschwindet, d.h. wenn $a_{-k} = 0$ für alle $k \geq 1$ gilt,
- ein Pol der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$), wenn im Hauptteil $a_{-n} \neq 0$, aber $a_{-k} = 0$ für alle $k > n$ gilt,
- wesentlich, wenn im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind.

BEWEIS: Im Fall a) hat die Laurentreihe um die isolierte Singularität z_0 explizit die folgende **Gestalt**:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (3.34)$$

Daraus ist klar, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert.

Falls z_0 Pol der Ordnung n ist, so gilt die Darstellung:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (a_{-n} \neq 0) \quad (3.35)$$

Daraus kann man ablesen, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a_{-n}$ ist.

Sind unendlich viele Koeffizienten $a_k \neq 0$, so kann ein Limes wie in a) oder b) nicht existieren. \square

Beispiel 3.17 :

Die Funktionen

$$f(z) := \frac{\sin z}{z}, \quad g(z) := \frac{\sin z}{z^4}, \quad h(z) := \sin \frac{1}{z}$$

besitzen jeweils in z_0 eine singuläre Stelle. Es folgt aus

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

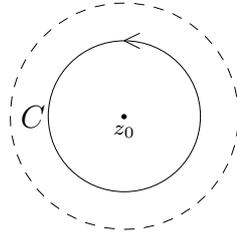
- 1) $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$: $z_0 = 0$ ist hebbar.
- 2) $\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$: $z_0 = 0$ ist Pol der Ordnung 3.
- 3) $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots$: $z_0 = 0$ ist wesentlich.

3.7.3 Residuenkalkül

Ist z_0 eine isolierte Singularität der Funktion f , so können wir $f(z)$ auf einem Gebiet der Form $0 < |z - z_0| < r$ als Laurentreihe darstellen:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m \quad (3.36)$$

C sei eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in diesem Gebiet; sie umschlieÙe die singuläre Stelle z_0 .



Aus Beispiel 3.9,1) ist folgendes Ergebnis bekannt:

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq -1 \\ 2\pi j, & \text{falls } m = -1 \end{cases}$$

Integriert man (3.36) entlang C , so erhalten wir mit diesem Ergebnis:

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \oint_C a_m (z - z_0)^m dz = 2\pi j a_{-1} \quad (3.37)$$

Definition 3.4 Ist z_0 eine isolierte Singularität von f , so wird der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe um z_0 Residuum von f an der Stelle z_0 genannt. Wir benutzen dafür die Notation:

$$\text{res}(f, z_0) := a_{-1}$$

Damit kann man die Beziehung (3.37) wie folgt schreiben:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \text{res}(f, z_0) \quad (3.38)$$

Der folgende Satz stellt nun eine Verallgemeinerung der Formel (3.38) dar. Wir erhalten damit eine brauchbare Methode, Kurvenintegrale entlang geschlossener Wege zu berechnen.

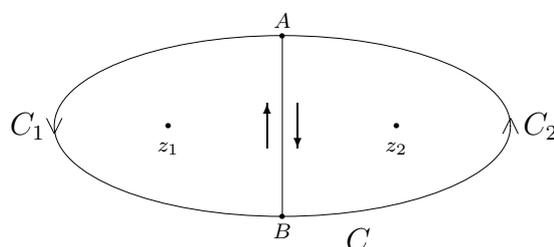
Satz 3.22 (Residuensatz)

f sei bis auf isolierte Singularitäten im Gebiet G analytisch. C sei eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, die endlich viele Singularitäten z_1, \dots, z_p umschlieÙe, aber selbst durch keine Singularität gehe. Dann gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^p \text{res}(f, z_k)$$

BEWEIS: Er wird für $p = 2$ ausgeführt, der allgemeine Fall ist entsprechend durchzuführen. Wie in der Skizze dargestellt, wählen wir zwei Punkte A, B auf C , die C in C_1 und C_2 zerlegen. Da sich die Integration über \overline{AB} und \overline{BA} aufhebt, gilt, wenn man $\Gamma_1 = C_1 \oplus \overline{BA}$ und $\Gamma_2 = C_2 \oplus \overline{AB}$ setzt:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{\overline{AB}} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{\overline{BA}} f(z) dz \\ &= \oint_{\Gamma_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_2} f(z) dz \\ &= 2\pi j (\operatorname{res}(f, z_1) + \operatorname{res}(f, z_2)) \quad (\text{mit 3.38}) \end{aligned}$$



□

Beispiel 3.18 :

Die folgenden Darstellungen durch Laurentreihen um $z_0 = 0$ sind bekannt:

$$g(z) := \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

$$h(z) := \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{7!z^7}{+} \dots$$

Daraus kann man ablesen: $\operatorname{res}(g, 0) = -1/3!$ und $\operatorname{res}(h, 0) = 1$.

$$\implies \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz = -\frac{\pi}{3}j, \quad \oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi j$$

Merke: Ist z_0 eine **hebbare Singularität** von f , so verschwindet der Hauptteil der Laurentreihe von f um z_0 (insbesondere ist a_{-1} null), also gilt in diesem Fall: $\operatorname{res}(f, z_0) = 0$.

Auch wenn z_0 ein **Pol** von f ist, braucht man zur Bestimmung von $\operatorname{res}(f, z_0)$ die Laurentreihe von f um z_0 **nicht**. Es steht hierfür die überaus **nützliche Formel** aus folgendem Satz zur Verfügung.

Satz 3.23 (Berechnung des Residuums an einer Polstelle)

Die Funktion f besitze in z_0 einen Pol der Ordnung n , dann gilt die Formel:

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right\} \quad (3.39)$$

Den wichtigen Spezialfall eines Poles 1. bzw. 2. Ordnung geben wir explizit an:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad \operatorname{res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)] , \\ n = 2: \quad \operatorname{res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d}{dz} [(z-z_0)^2 f(z)] \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS: Da z_0 ein Pol der Ordnung n ist, haben wir die Darstellung (3.35):

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Diese multiplizieren wir mit dem Faktor $(z-z_0)^n$:

$$(z-z_0)^n f(z) = \underbrace{a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1}}_1 + \underbrace{a_{-1}(z-z_0)^{n-1}}_2 + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+n}}_3$$

Leitet man die rechten Seite dieser Beziehung $(n-1)$ -mal ab, so verschwinden alle Terme 1), der Summand 2) lautet: $(n-1)!a_{-1}$ und die Reihe 3) besitzt die Form $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k+1}$. Daraus folgt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right\} = (n-1)! a_{-1}$$

Damit ist (3.41) bewiesen! □

Beispiel 3.19 :

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)(z-1)^2}, \quad z_0 = 2 \text{ einfacher Pol, } z_1 = 1 \text{ zweifacher Pol.}$$

$$\operatorname{res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} [(z-2)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z+1}{(z-1)^2} = 3$$

$$\operatorname{res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-3}{(z-2)^2} = -3$$

Nach dem Residuensatz gilt damit:

$$\oint_{|z-2|=1/2} \frac{z+1}{(z-2)(z-1)^2} dz = 6\pi j, \quad \oint_{|z-1|=1/2} \frac{z+1}{(z-2)(z-1)^2} dz = -6\pi j$$

$$\oint_{|z|=2.5} \frac{z+1}{(z-2)(z-1)^2} dz = 0$$

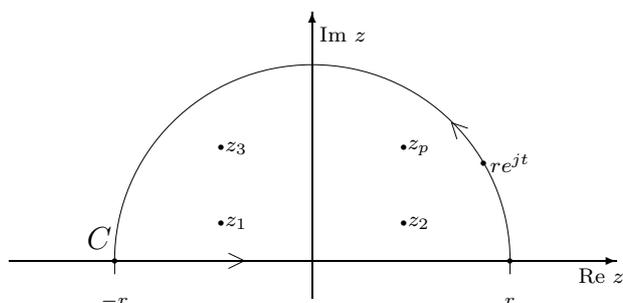
Der Residuenkalkül kann zur **Berechnung spezieller Typen reeller Integrale** herangezogen werden. Das zugrundeliegende Prinzip (das später wiederholt in modifizierter Form zum Tragen kommt) wird an folgendem uneigentlichen Integral einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verdeutlicht:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Die Fortsetzung $w = f(z)$ der obigen Funktion in die komplexe Ebene \mathbb{C} möge, mit Ausnahme endlich vieler singularer Stellen, auf \mathbb{C} analytisch sein. Seien nun z_1, \dots, z_p die singulären Stellen von f in der Halbebene $\text{Im } z > 0$ („obere Halbebene“). Ist C die in der Skizze dargestellte, einfach geschlossene Kurve, so gilt:

$$2\pi j \sum_{k=1}^p \text{res}(f, z_k) = \oint_C f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_0^\pi f(re^{jt}) jre^{jt} dt$$

Unterwirft man f jetzt noch der Forderung $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, so verschwindet das letzte Integral für $r \rightarrow \infty$, und man erhält das Ergebnis des folgenden Satzes.



Satz 3.24 (Berechnung eines reellen Integrals mit Residuen)

f besitze in \mathbb{C} höchstens endlich viele Singularitäten und sei ansonsten analytisch. Keine Singularität liege in \mathbb{R} . Die Singularitäten, die in der Halbebene $\text{Im } z > 0$ liegen, seien mit z_1, \dots, z_p bezeichnet. Ferner sei $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi j \sum_{k=1}^p \text{res}(f, z_k)$$

sofern das uneigentliche Integral existiert.

Beispiel 3.20 :

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$ (mit positivem a) erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 3.24. In der Halbebene $\text{Im } z > 0$ besitzt $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ den einfachen Pol $z_0 = aj$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{res}(f, aj) &= \lim_{z \rightarrow aj} [(z - aj)f(z)] = \lim_{z \rightarrow aj} \frac{1}{z + aj} = \frac{1}{2aj} \\ \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} &= 2\pi j \text{res}(f, aj) = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

3.8 Zusammenfassung

Funktionentheorie

Es werden Funktionen des Typs

$$f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \rightarrow w = f(z) \quad (3.40)$$

betrachtet. Der Definitionsbereich G soll im folgenden stets ein Gebiet in \mathbb{C} sein.

KOMPLEXE DIFFERENZIERBARKEIT UND HOLOMORPHIE :

Die komplexe Funktion f sei in einer Umgebung U von z definiert. Falls der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert, heißt f in z **komplex differenzierbar** und $f'(z)$ wird Ableitung von f in z genannt.

Ist die Ableitung $f'(z)$ für alle z aus einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ vorhanden, so heißt f **holomorph** oder **analytisch** auf G .

NACHWEIS DER ANALYTIZITÄT MIT DEN CAUCHY-RIEMANNSCHEM DGLN:

$f = u + jv$ sei auf G definiert. Die Funktionen u und v mögen auf G stetig partiell nach x und y differenzierbar sein. Falls u und v für alle $(x, y) \in G$ die folgenden DGLn (Cauchy-Riemann'sche DGLn) erfüllen:

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad v_x(x, y) = -u_y(x, y)$$

dann ist f auf G eine analytische Funktion. Man kann $f'(z)$ auch wie folgt berechnen: $f'(x + jy) = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$

Es gelten formal dieselben ABLEITUNGSREGELN wie im Reellen:

f, g seien in z komplex differenzierbar. Dann trifft dies auch auf $f + g$, αf , fg und $\frac{f}{g}$ zu ($\frac{f}{g}$ nur, falls $g(z) \neq 0$ ist) und es gelten folgende Formeln:

$$\begin{aligned} (f(z) + g(z))' &= f'(z) + g'(z) & (\alpha f(z))' &= \alpha f'(z) \\ (f(z)g(z))' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) & \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \end{aligned}$$

Ist F in $w = g(z)$ komplex differenzierbar, so gilt die Kettenregel: $[F(g(z))]' = F'(g(z))g'(z)$

GRENZWERTBESTIMMUNG NACH DE L'HOSPITAL :

f und g seien auf einer Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ von z_0 analytisch mit $f(z_0) = 0 = g(z_0)$. Ist $g'(z_0) \neq 0$, so folgt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Zusatz: Tritt der Fall $f'(z_0) = 0 = g'(z_0)$ ein, und ist $g''(z_0) \neq 0$, so ist der Grenzwert mit $f''(z_0)/g''(z_0)$ identisch, usw.

z_0 heißt **isolierte Singularität** von f , wenn f in einem Gebiet der Form $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, analytisch, aber in z_0 selbst nicht definiert ist.

Es werden drei Typen von ISOLIERTEN SINGULARITÄTEN unterschieden:

- z_0 wird hebbar genannt, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert.
- z_0 heißt Pol der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$), wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ existiert und $\neq 0$ ist.
- Im verbleibenden Fall spricht man von einer wesentlichen Singularität.

Eine Kurve C in \mathbb{C} ist gegeben durch $z(t) := x(t) + jy(t)$ (z hängt stetig von $t \in [\alpha, \beta]$ ab).

KOMPLEXES KURVENINTEGRAL: Es ist für $f = u + jv$, stetig auf C , definiert:

$$\int_C f(z) dz := \int_\alpha^\beta f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ :

f sei auf dem Gebiet G analytisch. Für jede einfach geschlossene Kurve C in G , deren Inneres ganz zu G gehört, gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

WEGUNABHÄNGIGKEIT DES KURVENINTEGRALS: f sei auf G eine analytische Funktion.

1) Γ und C seien zwei Kurven in G , die beide den Anfangspunkt a mit dem Endpunkt b verbinden. Falls das Innere von $\Gamma \oplus C_*$ ganz zu G gehört, dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

2) Γ und C seien nun zwei einfach geschlossene (gleich orientierte) Kurven in G , so daß der gesamte Bereich „zwischen“ C und Γ ganz zu G gehört. Dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

INTEGRATION MITTELS EINER STAMMFUNKTION:

Für jede Kurve C in G ist das Integral $\int_C f(z) dz$ genau dann unabhängig von C , wenn f auf G eine Stammfunktion F besitzt. Dann gilt, wenn a Anfangs- und b Endpunkt von C ist:

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a)$$

HINREICHENDE BEDINGUNG: Ist f auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G von \mathbb{C} analytisch, dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

DIE TAYLORREIHE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION:

f sei auf G analytisch und z_0 sei $\in G$. Ferner sei $K_r(z_0)$ das größte Kreisgebiet, das ganz in G liegt. Dann besitzt f für jedes $z \in K_r(z_0)$ die Potenzreihendarstellung:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Insbesondere folgt daraus, dass f auf G beliebig oft differenzierbar ist.

Spezialfall des SATZES VON LAURENT: f besitze in z_0 eine isolierte Singularität und sei auf dem Gebiet $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ analytisch. Wir können dann f auf diesem Gebiet als Laurentreihe darstellen:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_0)^m := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

CHARAKTERISIERUNG EINER ISOLIERTEN SINGULARITÄT: Die isolierte Singularität z_0 mit obiger Laurent-Entwicklung ist genau dann

- a) hebbar, wenn $a_{-k} = 0$ für alle $k \geq 1$ gilt
- b) ein Pol der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$), wenn $a_{-n} \neq 0$, aber $a_{-k} = 0$ für alle $k > n$ gilt,
- c) wesentlich, wenn im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind.

RESIDUUM: Ist z_0 eine isolierte Singularität von f , so wird der Koeffizient a_{-1} der Laurentreihe um z_0 Residuum von f an der Stelle z_0 genannt. Wir benutzen dafür die Notation: $\text{res}(f, z_0) := a_{-1}$

RESIDUENSATZ:

f sei bis auf isolierte Singularitäten im Gebiet G analytisch. C sei eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, die endlich viele Singularitäten z_1, \dots, z_p

umschlieÙe, aber selbst durch keine Singularität gehe. Dann gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^p \operatorname{res}(f, z_k)$$

BERECHNUNG DES RESIDUUMS AN EINER POLSTELLE:

Die Funktion f besitze in z_0 einen Pol der Ordnung n , dann gilt die Formel:

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right\}$$

Den wichtigen Spezialfall eines Poles 1. bzw. 2. Ordnung geben wir explizit an:

$$n = 1: \operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)], \quad n = 2: \operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d}{dz} [(z-z_0)^2 f(z)] \right\}.$$

Kapitel 4

Integraltransformationen

Auf den Methoden der Funktionentheorie beruhen die für die Elektrotechnik überaus wichtigen Integraltransformationen, von denen in diesem Kapitel die Fourier-, die Laplace- und die Z-Transformation behandelt werden. Diese Transformationen spielen bei der Modellbildung in der Nachrichten- und der Regelungstechnik eine bedeutsame Rolle. Die Fourier- und die Laplacetransformation befassen sich mit der Transformation zeitkontinuierlicher Systemgrößen, wogegen die Z-Transformation auf zeitdiskrete Signale und Prozesse zugeschnitten ist. Ein wichtiger Zweck von Integraltransformationen besteht darin, spezielle Systeme von Differentialgleichungen oder Differenzgleichungen in Systeme von algebraischen Gleichungen zu transformieren, die einfacher als jene zu lösen oder zu analysieren sind. Im ersten Abschnitt behandeln wir zunächst Fourierreihen, mit deren Hilfe die Einführung der Fouriertransformation motiviert werden kann.

4.1 Fourierreihen

Die Theorie der Fourierreihen beschäftigt sich mit der Zerlegung „spezieller“ Signale in sinus/cosinusförmige Schwingungen. Die Darstellung soll dabei in einer trigonometrischen Reihen der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

erfolgen. Bevor die Frage geklärt werden kann, welche Funktionen sich mit Hilfe einer trigonometrischen Reihe darstellen lassen, sind grundlegende Ausführungen über periodische Funktionen erforderlich.

4.1.1 Trigonometrische Polynome und Reihen

Definition 4.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt T -periodisch auf \mathbb{R} , wenn es eine Zahl $T > 0$ gibt, so daß gilt:

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Die kleinste positive Zahl T , die die Eigenschaft (4.1) erfüllt, nennen wir Periode der Funktion f .

Zur Erläuterung einige BEISPIELE:

Die folgenden Funktionen sind auf \mathbb{R} 2π -periodisch:

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t, \quad w(t) = e^{jt} := \cos t + j \sin t$$

Für festes $T > 0$ sind die folgenden Funktionen auf \mathbb{R} T -periodisch (der einfache Beweis wird in der Vorlesung ausgeführt):

$$f(t) := \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad g(t) := \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad w(t) := e^{j(2\pi/T)t} \quad (4.2)$$

Die Größe $\frac{2\pi}{T}$ wird Frequenz der Schwingung genannt und in diesem Abschnitt durchgehend mit ω abgekürzt, also:

$$\frac{2\pi}{T} =: \omega$$

Das folgende Resultat, das „leicht“ begründet werden kann, besagt, dass das Produkt und die Linearkombination von T -periodischer Funktionen wieder periodische Funktionen ergibt.

Lemma 4.1 f, g seien T -periodische Funktionen auf \mathbb{R} . Dann sind die Produktfunktion fg und die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ (für beliebiges $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) T -periodisch auf \mathbb{R} .

Aus dem Lemma folgt insbesondere, dass eine Linearkombination aus endlich vielen T -periodischen Funktionen wieder eine T -periodische Funktion ergibt. Als **Beispiel** betrachten wir eine Überlagerung von sinus/cosinusförmigen Schwingungen, wie sie in (4.2) gegeben sind:

$$p_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (4.3)$$

mit $\omega = 2\pi/T$, wobei die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ aus \mathbb{R} vorgegeben seien.

Eine Funktion des Typs (4.3) wird **trigonometrisches Polynom vom Grad n** genannt. Es ist üblich, $p_n(t)$ auch in komplexer Form zu schreiben. Dies ist möglich, wenn wir die Eulerschen Formeln (vgl. (3.5)) benutzen. Danach gilt:

$$\cos(k\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}), \quad \sin(k\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t})$$

Wir setzen $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ in (4.3) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2j} \right) e^{jk\omega t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2j} \right) e^{-jk\omega t} \right] \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=:c_0} + \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{\left(\frac{a_k - b_k j}{2} \right)}_{=:c_k} e^{jk\omega t} + \underbrace{\left(\frac{a_k + b_k j}{2} \right)}_{=:c_{-k}} e^{-jk\omega t} \right] \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{j(-k)\omega t} \\ &= c_{-n} e^{-jn\omega t} + \dots + c_{-1} e^{-j\omega t} + c_0 + c_1 e^{j\omega t} + \dots + c_n e^{jn\omega t} \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t} \end{aligned}$$

Für das trigonometrische Polynom $p_n(t)$ gilt also die folgende Identität

$$p_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t} \quad (4.4)$$

mit den Umrechnungsformeln

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_k := \frac{1}{2}(a_k - b_k j), \quad c_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + b_k j)$$

Auflösen nach a_0, a_k, b_k liefert die Formeln in der Form:

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k)$$

Läßt man im Ausdruck (4.4) n gegen ∞ gehen, so erhält man eine unendliche Reihe, die **trigonometrische Reihe** genannt wird:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (4.5)$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Man beachte, dass diese Reihe nicht konvergent sein muß. Es dürfte aber klar sein, daß dann, wenn sie für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, sie eine T -periodische Funktion definiert.

Ist eine Funktion f auf \mathbb{R} T -periodisch, dann ist sie bereits dann **eindeutig festgelegt**, wenn ihre Funktionswerte auf einem Intervall der Länge T , also auf einem Intervall der Form $(a, a + T]$, definiert sind.

Dieser Sachverhalt wird häufig dazu benutzt, T -periodische Funktionen zu definieren, indem man eine Funktion $h : (a, a + T] \mapsto \mathbb{C}$ durch eine Vorschrift vorgibt und sagt, die Funktion f sei die T -periodische Fortsetzung von h auf \mathbb{R} . Formal bedeutet dies, dass f durch h wie folgt festgelegt wird: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gelte:

$$f(t + nT) := h(t) \quad \forall t \in (a, a + T]$$

Als Definitionsintervalle für h werden dabei meist die Intervalle $(0, T]$ bzw. $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ benutzt.

Beispiel 4.1 :

Wir betrachten die folgenden Funktionen:

$$h_1 : (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \mapsto \mathbb{R}, \quad h_1(t) := t, \quad h_2 : (0, T] \mapsto \mathbb{R}, \quad h_2(t) := \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)$$

$$h_3 : (0, T] \mapsto \mathbb{R}, \quad h_3(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } t \in (0, \frac{T}{2}] \\ -1, & \text{für } t \in (\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

Die T -periodischen Fortsetzungen f_1, f_2, f_3 der Funktionen h_1, h_2, h_3 werden Sägezahn-, gleichgerichtete Sinus- bzw. Rechteckschwingung genannt. Die Graphen dieser Funktionen werden in der Vorlesung jeweils in einer Skizze dargestellt!

4.1.2 Darstellung von Funktionen durch Fourierreihen

In diesem Unterabschnitt geht es darum zu klären, unter welchen Voraussetzungen eine T -periodische Funktion f durch eine trigonometrischen Reihe der Form (4.5) mit $\omega := 2\pi/T$ dargestellt werden kann. Insbesondere ist zu klären, wie die Folge der Koeffizienten $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. die Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, die in der Reihendarstellung auftreten, berechnet werden müssen.

Zunächst wollen wir folgender **Frage** nachgehen: Vorgegeben sei eine T -periodische Funktion f , die stückweise stetig sein soll. Wie müssen die Koeffizienten c_k bestimmt werden, damit das trigonometrische Polynom (vom Grade n), also

$$p_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t} \quad (4.6)$$

die Funktion f auf dem Intervall $(0, T]$ „bestmöglichst“ approximiert? Zu diesem Zweck wird ein geeigneter Abstandsbegriff zwischen den betrachteten Funktionen benötigt.

Die Menge aller stückweise stetigen, T -periodischen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{C} bildet einen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{C}_u((0, T])$ bezeichnen (vgl. Mathematik A, Definition 2.4). Für je zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}_u((0, T])$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

Man prüft leicht nach, dass auf diese Weise ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}_u((0, T])$ eingeführt wird (vgl. Mathematik A, Beispiel 5.12, 3)).

Damit läßt sich folgende Norm auf dem Vektorraum definieren:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

womit wir einen Abstand zwischen zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}_u((0, T])$ wie folgt erklären können: $\|f - g\| = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

Unsere Zielsetzung besteht darin, zu vorgegebener Funktion f die Koeffizienten c_k im trigonometrischen Polynom (4.6) so zu bestimmen, dass der Abstand $\|f - p_n\|$ minimal wird. Von allen trigonometrischen Polynomen vom Grade n wäre dann p_n die beste Approximation („**Bestapproximation**“) an f .

Zur Beantwortung der gestellten Frage benötigen wir folgende Hilfsaussage.

Lemma 4.2 Sei $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Das System von Funktionen

$$1, e^{j\omega t}, e^{-j\omega t}, e^{2j\omega t}, e^{-2j\omega t}, \dots, e^{kj\omega t}, e^{-kj\omega t}, \dots \quad (4.7)$$

bildet im Vektorraum $\mathcal{C}_u((0, T])$ bezüglich des angegebenen Skalarprodukts ein Orthogonalsystem.

BEWEIS: Sei $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Dann gilt wegen $T\omega = 2\pi$ folgende Hilfsaussage:

$$\int_0^T e^{nj\omega t} dt = \frac{1}{jn\omega} e^{nj\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{jn\omega} (\underbrace{e^{j2n\pi}}_{=1} - 1) = 0 \quad (4.8)$$

Für $n = 0$ gilt offenbar: $\int_0^T 1 dt = T$ (*). Wir zeigen nun, daß (4.7) ein Orthogonalsystem ist:

$$\begin{aligned} \langle e^{kj\omega t}, e^{mj\omega t} \rangle &= \int_0^T e^{kj\omega t} \overline{e^{mj\omega t}} dt \\ &= \int_0^T e^{kj\omega t} e^{-mj\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{(k-m)j\omega t} dt = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq m \\ T, & \text{falls } k = m \end{cases} \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen (4.8) und (*). \square

Das folgende Resultat zeigt, wie die Koeffizienten c_k bestimmt werden müssen, damit p_n eine Bestapproximation an die Funktion f darstellt.

Satz 4.1 *Sei f eine stückweise stetige, T -periodische Funktion und sei $p_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t}$ mit $\omega := 2\pi/T$. Dann ist das trigonometrische Polynom p_n eine Bestapproximation an f , wenn die Koeffizienten c_k wie folgt bestimmt werden:*

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (\forall k \in \mathbb{Z}) \quad (4.9)$$

BEWEIS: Sei p_n ein trigonometrisches Polynom in der folgenden Darstellung:

$$p_n(t) := \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega t}$$

Hierin sind C_k beliebige Konstanten aus \mathbb{C} für $-n \leq k \leq n$. Nun gilt:

$$0 \leq \|f - p_n\|^2 = \langle f - p_n, f - p_n \rangle = \|f\|^2 - (\langle f, p_n \rangle + \overline{\langle f, p_n \rangle}) + \langle p_n, p_n \rangle$$

Nach den Rechenregeln des Skalarprodukts erhält man für $\langle f, p_n \rangle$ und $\langle p_n, p_n \rangle$:

$$\langle f, p_n \rangle = \left\langle f, \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega t} \right\rangle = \sum_{k=-n}^n \overline{C_k} \langle f, e^{jk\omega t} \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle p_n, p_n \rangle &= \left\langle \sum_{k=-n}^n C_k e^{jk\omega t}, \sum_{m=-n}^n C_m e^{jm\omega t} \right\rangle \\ &= \sum_{k=-n}^n \sum_{m=-n}^n C_k \overline{C_m} \langle e^{jk\omega t}, e^{jm\omega t} \rangle = T \sum_{k=-n}^n C_k \overline{C_k}\end{aligned}$$

Einsetzen in obige Beziehung ergibt:

$$\begin{aligned}0 &\leq \|f - p_n\|^2 = \|f\|^2 + T \left(\sum_{k=-n}^n C_k \overline{C_k} - \left(\overline{C_k} \frac{1}{T} \langle f, e^{jk\omega t} \rangle + C_k \frac{1}{T} \overline{\langle f, e^{jk\omega t} \rangle} \right) \right) \\ &= \|f\|^2 + T \left(\sum_{k=-n}^n \underbrace{\left(C_k - \frac{1}{T} \langle f, e^{jk\omega t} \rangle \right) \left(\overline{C_k} - \frac{1}{T} \overline{\langle f, e^{jk\omega t} \rangle} \right)}_{= \left| C_k - \frac{1}{T} \langle f, e^{jk\omega t} \rangle \right|^2} \right) - \frac{1}{T^2} |\langle f, e^{jk\omega t} \rangle|^2\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird genau dann minimal, wenn man folgende Wahl für die Koeffizienten C_k trifft, weil dann die in der Mitte stehende nicht-negative Summe null wird:

$$C_k := c_k = \frac{1}{T} \langle f, e^{jk\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Also ist der Abstand $\|f - p_n\|$ minimal genau für diese Festsetzung der C_k . \square

Die Aussage des Satzes läßt sich leicht übertragen auf die Darstellung des trigonometrischen Polynoms mit Cosinus-/Sinusfunktionen.

Satz 4.2 Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ T -periodisch und stückweise stetig. Dann ist

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

mit $\omega = 2\pi/T$ eine Bestapproximation an f , wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ wie folgt festgelegt werden:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (\text{für } k \geq 1) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (\text{für } k \geq 1)\end{aligned} \tag{4.10}$$

BEWEIS: Die Behauptung folgt aus obigem Satz mit Hilfe der Umrechnungsformeln; dabei ist die Beziehung $e^{-jk\omega t} = \cos(k\omega t) - j \sin(k\omega t)$ zu beachten:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2}{T} \int_0^T 1 dt$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}(c_k) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \right) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}(c_k) = -2 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \right) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$$

□

Definition 4.2 Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ T -periodisch und stückweise stetig. Dann heißen die Koeffizienten c_k gemäß (4.9) bzw. die Koeffizienten a_0, a_k, b_k gemäß (4.10) Fourierkoeffizienten von f . Die Reihe mit diesen Koeffizienten, also

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

wird dann *Fourierreihe* von f genannt. Die erste Reihe nennen wir *komplexe Form* (oder *Exponentialform*) und die zweite Reihe *Cosinus-/Sinusform* der *Fourierreihe*.

Bemerkung: Ist g auf \mathbb{R} T -periodisch, dann kann leicht begründet werden, dass für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^T g(t) dt = \int_a^{a+T} g(t) dt$$

d.h. der Wert des Integrals bleibt unverändert, wenn das Integrationsintervall um a verschoben wird.

Wenn nun f T -periodisch ist, dann trifft das auch auf die Produktfunktionen $f(t) \cos(k\omega t)$, $f(t) \sin(k\omega t)$ und $f(t) e^{-jk\omega t}$ zu (s. Lemma 4.1). Dies bedeutet, dass man in den Berechnungsformeln der Fourierkoeffizienten (4.9) bzw. (4.10) das Integrationsintervall $[0, T]$ durch ein beliebiges Intervall der Länge T ersetzen darf, also z.B. durch $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Entsprechendes gilt für die Berechnung der Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k .

Übergang zu einem anderen Integrationsintervall der Länge T kann im Einzelfall zu RECHENVORTEILEN bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten führen.

Unter welchen Voraussetzungen wird eine T -periodische Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt? Zur Beantwortung dieser Frage wird folgende Definition benötigt.

Definition 4.3 Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $[a, b]$ stückweise stetig differenzierbar, wenn f auf (a, b) mit Ausnahme endlich vieler Stellen stetig differenzierbar ist und alle einseitigen Grenzwerte von f und von f' an diesen Ausnahmestellen sowie den Randpunkten a, b existieren.

Eine T -periodische Funktion f nennen wir stückweise stetig differenzierbar, wenn sie auf einem Intervall der Länge T , etwa auf $[0, T]$, stückweise stetig differenzierbar ist.

Das folgende Resultat geben wir ohne Beweis an. Der Satz besagt, daß die Fourierreihe von f (unter „gewissen“ Voraussetzungen) die Funktion f darstellt, was insbesondere einschließt, dass die Reihe für jedes $t \in \mathbb{R}$ gegen den angegebenen Wert konvergiert.

Satz 4.3 (Darstellungssatz) Die Funktion f sei T -periodisch und auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für die Fourierreihe von f folgende Darstellung in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ ist. Natürlich gilt die Darstellung entsprechend auch für die Exponentialform der Fourierreihe.

Beachte: Ist f in t stetig, so gilt $f(t+) = f(t-) = f(t)$, also folgt:

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = f(t)$$

Ist t eine Sprungstelle, so ist $\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$ der Mittelwert zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert in t (die sog. „Sprungmitte“).

Beispiel 4.2 :

Betrachtet wird die Funktion

$$h : (0, T] \mapsto \mathbb{R}, \quad h(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } t \in (0, \frac{T}{2}] \\ 0, & \text{für } t \in (\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

f sei die T -periodische Fortsetzung der Funktion h auf \mathbb{R} ; sie ist stückweise stetig differenzierbar (wie man aus dem Graphen abliest).

Berechnung der Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k (mit $k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = 1 \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos(k\omega t) dt \\
 &= \frac{2}{kT\omega} \sin(k\omega t) \Big|_{t=0}^{t=T/2} \stackrel{T\omega=2\pi}{=} \frac{1}{k\pi} \left(\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \sin(0) \right) = 0 \\
 &\quad \text{(Beachte: } T\omega = 2\pi) \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(k\omega t) dt \\
 &= -\frac{2}{kT\omega} \cos(k\omega t) \Big|_{t=0}^{t=T/2} \stackrel{T\omega=2\pi}{=} -\frac{1}{k\pi} \left(\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} - \cos(0) \right) \\
 &= \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{2}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Setze $k := 2m - 1$, somit $b_{2m-1} = \frac{2}{(2m-1)\pi}$ für $m \in \mathbb{N}$. Damit erhält man die Darstellung für $f(t)$ in Sinus-/Cosinusform:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)\omega t)}{2m-1} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Berechne nun die Exponentialform der Fourierreihe von f (mit $k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = \frac{1}{2} \\
 c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{-jk\omega t} dt \\
 &= -\frac{1}{jkT\omega} e^{-jk\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T/2} \stackrel{T\omega=2\pi}{=} \frac{j}{2k\pi} \left(\underbrace{e^{-jk\pi}}_{=(-1)^k} - 1 \right) \\
 &= \frac{j}{2k\pi} \left((-1)^k - 1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{j}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Setze $k := 2m - 1$, somit $c_{2m-1} = -\frac{j}{(2m-1)\pi}$ für $m \in \mathbb{Z}$. Damit erhält man

die Darstellung für $f(t)$ in Exponentialform:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) &= \frac{1}{2} - \frac{j}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)\omega t}}{2m-1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{j}{\pi} (e^{j\omega t} + \frac{1}{3}e^{j3\omega t} + \frac{1}{5}e^{j5\omega t} + \dots - e^{-j\omega t} - \frac{1}{3}e^{-j3\omega t} - \frac{1}{5}e^{-j5\omega t} - \dots) \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten c_k kann man aus den Koeffizienten a_0 , a_k , b_k auch mit Hilfe der Umrechnungsformeln berechnen. Beachte ferner, dass in dem häufig auftretenden Spezialfall $T := 2\pi$ die Frequenz $\omega = 1$ ist.

Wir geben ein weiteres interessantes Konvergenzresultat für Fourierreihen ohne Beweis an.

Satz 4.4 (Konvergenz in der Norm) *Die Funktion f sei T -periodisch und stückweise stetig auf \mathbb{R} . Bildet man das trigonometrische Polynom p_n (für jedes $n \in \mathbb{N}$) mit den Fourierkoeffizienten von f , dann gilt:*

$$\|f - p_n\| \rightarrow 0 \quad (\text{für } n \mapsto \infty)$$

4.1.3 Darstellung gerader und ungerader Funktionen

Ist die T -periodische Funktion f gerade oder ungerade, so vereinfacht sich ihre Fourierreihe, wie der folgende Satz zeigt. Zunächst sei an die Begriffsbildungen „gerade“ und „ungerade“ erinnert.

Definition 4.4 *Betrachtet wird eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.*

1. f heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt für alle $x \in (-T/2, T/2)$.
2. f heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt für alle $x \in (-T/2, T/2)$.

Im Fall einer geraden Funktion f liegt ihr Graph spiegelbildlich zur y -Achse liegt; der Graph einer ungeraden Funktion liegt punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Im Beispiel 4.1 sind die Funktionen f_1 und f_3 ungerade, die Funktion f_2 ist gerade. $f(x) := \cos x$ ist eine gerade, $g(x) := \sin x$ ist eine ungerade Funktion.

Satz 4.5 *Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion, die stückweise stetig differenzierbar sei.*

1. Ist f gerade, so gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (d.h. in der Cosinus-/Sinusform der Fourierreihe von f treten keine Sinusfunktionen auf.)

2. Ist f ungerade, so gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (d.h. in der Cosinus-/Sinusform der Fourierreihe von f sind keine Cosinusfunktionen und keine additive Konstante enthalten.)

Besitzt also f eine dieser Symmetrieeigenschaften, so kann man sich entweder die Berechnung der Koeffizienten b_k oder der Koeffizienten a_k ersparen.

BEWEIS: Die T -periodische Funktion f sei gerade. Dann ist die Funktion $t \mapsto f(t) \sin(k\omega t)$ ungerade, weil $\sin(k\omega t)$ ungerade ist. Da die Fourierkoeffizienten auf einem beliebigen Integrationsintervall der Länge T berechnet werden dürfen, gilt:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt + \int_{-T/2}^0 f(t) \sin(k\omega t) dt \right) \end{aligned}$$

Da nun $f(t) \sin(k\omega t)$ ungerade ist, heben sich die beiden Integrale auf, also $b_k = 0$.

Analog begründet man, daß bei einer ungeraden Funktion f die Koeffizienten a_k für $k \in \mathbb{N}_0$ null sind. \square

Beispiel 4.3 :

Wir betrachten die Funktion

$$h : \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \mapsto \mathbb{R}, \quad h(t) := t$$

und definieren f als T -periodische Fortsetzung von h . f ist stückweise stetig differenzierbar; aus dem Graphen ist ablesbar, dass f ungerade ist; es gilt also: $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Es genügt also, nur die b_k zu berechnen. Dazu wird folgende Integrationsformel (für $\alpha \neq 0$) gebraucht:

$$\int x \sin(\alpha x) dx = -\frac{x}{\alpha} \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2} \sin(\alpha x)$$

In der nachfolgenden Rechnung berücksichtige man $\omega T/2 = \pi$.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \left(-\frac{t}{k\omega} \cos(k\omega t) + \frac{1}{(k\omega)^2} \sin(k\omega t) \right) \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} \\ &= \frac{2}{T} \left[-\frac{T}{2k\omega} \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} - \frac{T}{2k\omega} \underbrace{\cos(-k\pi)}_{=(-1)^k} + \frac{1}{(k\omega)^2} \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \frac{1}{(k\omega)^2} \underbrace{\sin(-k\pi)}_{=0} \right] \\ &= -\frac{2}{k\omega} (-1)^k = \frac{2}{k\omega} (-1)^{k+1} \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Darstellung von f durch ihre Fourierreihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) &= \frac{2}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(k\omega t)}{k} \\ &= \frac{T}{\pi} \left(\sin(\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

Wir leiten nun die Exponentialform der Fourierreihe her; dazu verwenden wir folgende Integrationsformel (mit $a \neq 0$):

$$\int x e^{ax} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \left(-\frac{t}{jk\omega} e^{-jk\omega t} + \frac{1}{(k\omega)^2} e^{-jk\omega t} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &\quad (\text{Beachte nun: } \omega T/2 = \pi \text{ und nachfolgend: } e^{jk\pi} = e^{-jk\pi} = (-1)^k) \\ &\stackrel{\omega T=2\pi}{=} \frac{1}{T} \left(\left(-\frac{T}{j2k\omega} \underbrace{e^{-jk\pi}}_{=(-1)^k} + \frac{1}{(k\omega)^2} \underbrace{e^{-jk\pi}}_{=(-1)^k} \right) - \left(\frac{T}{j2k\omega} \underbrace{e^{jk\pi}}_{=(-1)^k} + \frac{1}{(k\omega)^2} \underbrace{e^{jk\pi}}_{=(-1)^k} \right) \right) \\ &= \frac{j}{k\omega} (-1)^k \end{aligned}$$

Weiter gilt: $c_0 = 2a_0 = 0$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) &= \frac{j}{\omega} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{jk\omega t} \\ &= \frac{jT}{2\pi} \left(-e^{j\omega t} + \frac{e^{j2\omega t}}{2} - \frac{e^{j3\omega t}}{3} + \dots + e^{-j\omega t} - \frac{e^{-j2\omega t}}{2} + \frac{e^{-j3\omega t}}{3} + \dots \right) \end{aligned}$$

Natürlich hätte man die zweite Fourierreihe aus der ersten auch mit Hilfe der Umrechnungsformeln herleiten können.

4.2 Fouriertransformation

Im vorigen Abschnitt haben wir dargelegt, dass eine auf dem Intervall $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ stückweise stetig differenzierbare Funktion f auf diesem Intervall durch ihre Fourierreihe dargestellt werden kann. Die Fourierreihe selbst ist T -periodisch, sie stellt also stets auch die T -periodische Fortsetzung von f auf \mathbb{R} dar. Auf Fourier gehen Überlegungen zurück, eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

die nun **nicht mehr periodisch** auf \mathbb{R} ist, als „Überlagerung von Schwingungen“ darzustellen.

4.2.1 Einführung

Betrachtet wird eine stückweise stetig differenzierbare Funktion f auf \mathbb{R} . Wir betrachten die Einschränkung von f auf ein festes Intervall der Form $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Auf diesem Intervall kann die Funktion durch eine Fourierreihe dargestellt werden, wobei wir die Exponentialform der Reihe wählen und an Stelle von ω die Notation $\Delta\omega := 2\pi/T$ verwenden:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk(\Delta\omega)t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk(\Delta\omega)t} dt \quad (4.11)$$

Wir setzen $\omega_k := k \Delta\omega$ und beachten $\Delta\omega/2\pi = 1/T$. Wir substituieren nun $c_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk(\Delta\omega)t} dt$ in der Reihe und erhalten dann:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \right) \Delta\omega \quad (4.12)$$

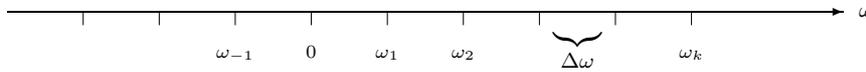
Für sehr großes T kann man $T/2$ und $-T/2$ durch ∞ bzw. $-\infty$ ersetzen, wobei wir voraussetzen, dass die entstehenden uneigentlichen Integrale existieren. Mit der Abkürzung

$$F(\omega_k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (4.13)$$

erhalten wir schließlich für (4.12) die Darstellung:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} F(\omega_k) \Delta\omega \quad (4.14)$$

Die Größen ω_k bilden die Teilpunkte einer Zerlegung der reellen Achse \mathbb{R} , die um so feiner ist, je kleiner $\Delta\omega$ (d.h. um so größer T) ist.



Dadurch wird die Auffassung nahegelegt, die Summe (4.14) als Riemannsche Näherungssumme für folgendes Integral zu interpretieren:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{4.15}$$

Dabei ist die Funktion $F(\omega)$ gemäß (4.13) definiert durch das Integral in

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{4.16}$$

Zu beachten ist, dass nun ω eine reelle Variable, und nicht mehr, wie in Abschnitt 4.1, eine konstant Zahl ist.

FAZIT: Wir haben einer Funktion $f(t)$ eine Funktion $F(\omega)$, die durch die Beziehung (4.16) mit Hilfe von f definiert wird, zugeordnet. Mit der Funktion $F(\omega)$ können wir $f(t)$ in der Form des Integrals (4.15) darstellen. Die Verwandtschaft dieser Darstellung mit jener von Fourierreihen erkennt man, wenn man das Integral (4.15) durch eine Riemannsche Näherungssumme (gemäß (4.14)) ersetzt (wobei $c_k := F(\omega_k)\Delta\omega$ zu setzen wäre).

Obige Betrachtungen sind natürlich nicht im Sinne einer strengen mathematischen Beweisführung zu verstehen. Auch bleibt noch zu klären, unter welchen Voraussetzungen die Ergebnisse überhaupt gelten. Generell wollen wir im Rahmen dieses Abschnittes an jede Funktion f die Mindestanforderung stellen, dass sie auf \mathbb{R} **stückweise stetig** sein soll.

4.2.2 Fouriertransformierte und Umkehrformel

Definition 4.5 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Fourier-transformierbar*, wenn das uneigentliche Integral

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{4.17}$$

für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ existiert. Dann wird F **Fouriertransformierte** von f genannt. Man nennt das Paar (f, F) eine F -Korrespondenz und schreibt dafür auch:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \text{oder:} \quad f(t) \circ\text{---}\bullet F(\omega)$$

Die Benutzung dieser Symbole schließt ein, daß f F -transformierbar ist. F heißt Bild- oder Frequenzfunktion, f Original- oder Zeitfunktion. t nennen wir Zeit-, ω Frequenzvariable.

Die Aussage, dass f F -transformierbar ist, bedeutet, dass f eine Fouriertransformierte F besitzt. Als erstes soll eine hinreichende Bedingung für die F -Transformierbarkeit von f angegeben werden. Dazu benötigen wir folgende Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir **absolut integrierbar**, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Satz 4.6 Ist $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so besitzt f eine Fouriertransformierte F .

BEWEIS: Man muß zeigen, daß das uneigentliche Integral in (4.55) für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wegen $|e^{-j\omega t}| = 1$ folgt:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

Nach Voraussetzung ist dieses letzte Integral kleiner als ∞ . □

Ist F die Fouriertransformierte von f , so gilt unter gewissen Voraussetzungen die im vorigen Abschnitt angegebene **Umkehrformel**, mit der man die Originalfunktion $f(t)$ aus der Bildfunktion $F(\omega)$ zurückgewinnen kann. Die Aussage wird ohne Beweis angegeben.

Satz 4.7 (Umkehrformel zur F -Transformation)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei absolut integrierbar und auf \mathbb{R} stückweise stetig differenzierbar. Dann läßt sich $f(t)$ in jedem Stetigkeitspunkt $t \in \mathbb{R}$ von f mit Hilfe der Formel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4.18)$$

darstellen. An jeder Sprungstelle ist eine Darstellung der Gestalt

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4.19)$$

möglich. Die Darstellung (4.18) zusammen mit (4.19) nennt man Umkehrformel der Fouriertransformation oder auch die Spektraldarstellung von f .

Beispiel 4.4 :

1. Wir berechnen die Fouriertransformierte der folgenden Funktion f (die Rechteckfunktion (der Breite $2a$) genannt wird):

$$f(t) := \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ für } |t| \leq a \\ 0, \text{ sonst} \end{array} \right\} \quad \text{mit } a > 0$$

Wir führen zunächst die Integration für $\omega \neq 0$ aus:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a 1e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega}$$

Für $\omega = 0$ folgt: $F(0) = \int_{-a}^a 1 dt = 2a$. Das Ergebnis lautet somit:

$$F(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a & \text{für } \omega = 0 \end{array} \right.$$

2. Die F-Transformierte der Funktion $g(t) = e^{-\alpha|t|}$ mit $\alpha > 0$ wird berechnet:

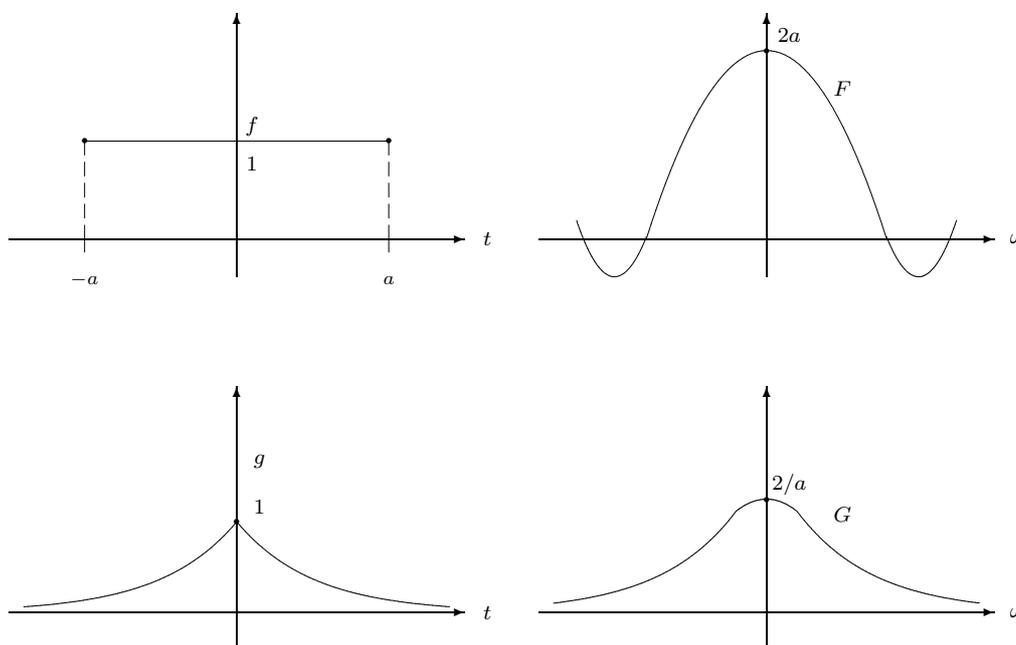
$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha|t| + j\omega t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{-(-\alpha + j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} - \frac{1}{-\alpha + j\omega} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t=0} \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{-\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Verwendet wurde dabei, daß $|e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}| = e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ strebt für $t \rightarrow \infty$, und ebenso $|e^{\alpha t} e^{-j\omega t}| = e^{\alpha t} \rightarrow 0$ geht für $t \rightarrow -\infty$.

Zur Erläuterung wird die Umkehrformel (4.19) hingeschrieben. Danach läßt sich die Funktion $e^{-\alpha|t|}$ wie folgt darstellen:

$$e^{-\alpha|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{für } t \in \mathbb{R})$$

Wir skizzieren die Graphen der obigen Funktionen:



Aus dem Fourierintegral (4.55) ist ersichtlich, daß die Bildfunktion F durch die Zeitfunktion f eindeutig bestimmt wird. Die Umkehrung ist (mit einer kleinen Einschränkung) ebenfalls zutreffend, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.8 (Eindeutigkeit der Fouriertransformation)

Die Funktionen f_1 und f_2 mögen die Voraussetzungen des Satzes 4.5 erfüllen. Falls ihre F -Transformierten F_1 und F_2 identisch sind, gilt: $f_1(t) = f_2(t)$ in jedem Stetigkeitspunkt t von f_1 und f_2 .

Die Aussage folgt unmittelbar aus der Umkehrformel.

4.2.3 Eigenschaften der Fouriertransformation

Zunächst stellen wir einige **Rechenregeln** zusammen, die geeignet sind, aus bekannten Transformationspaaren neue Korrespondenzen abzuleiten. Dabei setzen wir voraus, dass die Korrespondenzen $f(t) \circ \bullet F(\omega)$, $g(t) \circ \bullet G(\omega)$ gelten, was einschließt, dass die Funktionen f, g Fouriertransformierbar sind. Unter dieser

Voraussetzung gelten die folgenden REGELN:

Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	○—●	$\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	○—●	$e^{-j t_0 \omega} F(\omega)$
Frequenzverschiebung	$e^{j \omega_0 t} f(t)$	○—●	$F(\omega - \omega_0)$
Konjugation	$\overline{f(t)}$	○—●	$\overline{F(-\omega)}$
Ähnlichkeit	$f(at)$	○—●	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Wir geben exemplarisch den BEWEIS von zweien dieser Beziehungen an, die Begründung der restlichen bleiben dem Leser überlassen. Wir verwenden dabei die Notation $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

Beweis der Zeitverschiebung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t - t_0)}_{=: \tau} e^{-j t \omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j(\tau + t_0)\omega} d\tau \\ &= e^{-j t_0 \omega} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j \tau \omega} d\tau}_{=F(\omega)} = e^{-j t_0 \omega} F(\omega) \end{aligned}$$

Beweis der Ähnlichkeit: Mit der Substitution $\tau = at$, $dt = \frac{1}{a}d\tau$ erhält man:

$$\begin{aligned} a > 0: \quad \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j \omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j \left(\frac{\omega}{a}\right) \tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ a < 0: \quad \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j \omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-j \left(\frac{\omega}{a}\right) \tau} d\tau = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Faßt man die beiden Fälle zusammen, so folgt die angegebene Beziehung. \square

Wir erläutern einige der oben angegebenen Regeln anhand von Beispielen.

Beispiel 4.5 :

- 1) Wir wenden die Regel der Zeitverschiebung auf die Funktion des Beispiels 4.4, 1) an: Die Funktion $f_1(t) := f(t - t_0)$ ist dann durch die Vorschrift

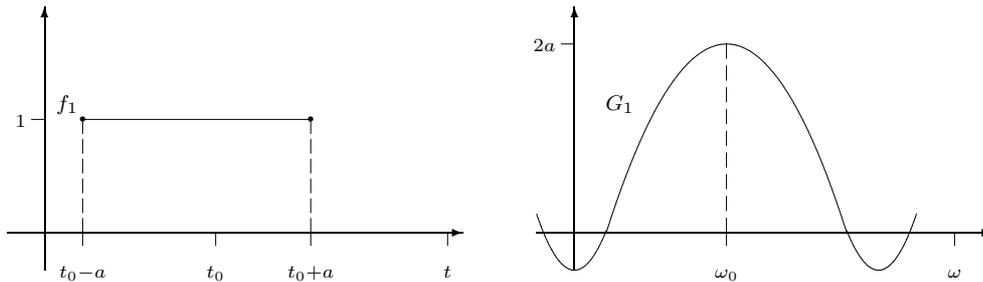
$$f_1(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } |t - t_0| \leq a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Somit gilt: $f_1(t) \circ\text{---}\bullet \frac{2e^{-j t_0 \omega} \sin(a\omega)}{\omega}$

2) Auf das Beispiel 4.4, 2) wenden wir die Regel der Frequenzverschiebung an:

$$e^{j\omega_0 t} e^{-\alpha|t|} \circ \bullet \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} = G(\omega - \omega_0) =: G_1(\omega)$$

Nachstehend sind die Graphen der beiden („verschobenen“) Funktionen $f_1(t) := f(t - t_0)$ bzw. $G_1(\omega) := G(\omega - \omega_0)$ skizziert:



3) Wir erläutern die Regel über die Ähnlichkeit. Zu diesem Zweck wird zunächst die folgende Funktion F-transformiert: $f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \frac{1}{1+j\omega} e^{-t} e^{-j\omega t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{1+j\omega}$$

Für positives a ist die nachstehende Funktion f_1 F -transformierbar. Die Transformierte F_1 können wir nach der genannten Regel angeben:

$$f_1(t) := f(at) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \circ \bullet F_1(\omega) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(1+j\frac{\omega}{a})} = \frac{1}{a+j\omega} \quad \square$$

Der folgende Satz zeigt, dass Differentiation im t -Bereich mit einer algebraischen Operation im ω -Bereich verknüpft ist.

Satz 4.9 (Differentiation im Zeitbereich)

f sei stetig und stückweise stetig differenzierbar. Sind f und f' absolut integrierbar, so folgt aus $f(t) \circ \bullet F(\omega)$ die F -Korrespondenz:

$$f'(t) \circ \bullet j\omega F(\omega)$$

BEWEIS: Wir wenden Produktintegration an:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt = f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow \infty} + j\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt}_{=F(\omega)}$$

Nun gilt, da f absolut integrierbar und stetig ist, folgendes: $|f(t)e^{-j\omega t}| = |f(t)| \rightarrow 0$ (für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$). Also folgt: $\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega)$ \square

Satz 4.10 (Differentiation im Bildbereich)

Ist die Funktion $f_1(t) := tf(t)$ F -transformierbar, so folgt aus $f(t) \circ \bullet F(\omega)$:

$$tf(t) \circ \bullet jF'(\omega)$$

Der Satz wird nicht vollständig **bewiesen**. Verzichtet wird in der nachstehenden „Herleitung“ auf den Nachweis, daß der Ableitungsoperator mit dem Integralzeichen vertauscht werden darf:

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right) \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} (f(t)e^{-j\omega t}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-jt)e^{-j\omega t} dt = -j\mathcal{F}\{tf(t)\} \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit j erhalten wir: $\mathcal{F}\{tf(t)\} = jF'(\omega)$. \square

Beispiel 4.6 :

Wir bestimmen die Bildfunktion zur Funktion $f(t) = e^{-t^2}$.

$$\text{Aus Satz 4.9 folgt: } -2te^{-t^2} \circ \bullet j\omega F(\omega) \Leftrightarrow te^{-t^2} \circ \bullet -\frac{j\omega}{2}F(\omega)$$

$$\text{Mit Satz 4.10 gilt: } te^{-t^2} \circ \bullet jF'(\omega)$$

Gleichsetzen führt zur folgenden separablen Differentialgleichung für F :

$$F'(\omega) = -\frac{\omega}{2}F(\omega) \Rightarrow \frac{dF}{F} = -\frac{\omega}{2}d\omega \Rightarrow \ln F(\omega) = -\frac{\omega^2}{4} + c \Rightarrow F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4} + c}$$

Nach der Transformationsformel gilt für $\omega = 0$: $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

$$\text{Somit: } f(t) = e^{-t^2} \circ \bullet F(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}.$$

Die vorangehenden Sätze enthalten Formeln, die zum Ausdruck bringen, daß gewissen Verknüpfungen und Operationen im Zeitbereich gewisse andere Verknüpfungen und Operationen im Bildbereich entsprechen. Wir nennen solche Formeln auch **Abbildungsgesetze**. Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Verknüpfung im Zeitbereich einem Produkt $F(\omega) \cdot G(\omega)$ im Bildbereich entspricht.

Definition 4.6 Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wird die Funktion $f * g$, die festgelegt wird durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

das Faltungsprodukt von f und g genannt, falls das uneigentliche Integral für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Faltungsprodukts wird in folgendem Hilfssatz angegeben.

Lemma 4.3 Sind f und g absolut integrierbar, so kann man das Faltungsprodukt $f * g$ bilden.

BEWEIS: Nach der allgemeinen Voraussetzung sind f, g auf \mathbb{R} stückweise stetig. Da sie desweiteren absolut integrierbar sind, sind sie auf \mathbb{R} auch beschränkt. Somit gibt es ein c mit $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, woraus folgt:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau)| |g(\tau)| d\tau \leq c \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

□

Lemma 4.4 Die Funktionen f, g, h seien absolut integrierbar. Dann gelten folgende Gesetze:

- 1) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Assoziativgesetz)
- 2) $f * g = g * f$ (Kommutativgesetz)
- 3) $f * (g + h) = f * g + f * h$ (Distributivgesetz)

Die nicht sonderlich schwierigen Beweise für diese Gesetze werden hier nicht ausgeführt.

Satz 4.11 (Faltungssatz)

Die Funktionen f und g seien absolut integrierbar. Aus $f \circ \bullet \bullet F$ und $g \circ \bullet \bullet G$ folgt:

$$F(\omega) \cdot G(\omega) \bullet \circ (f * g)(t)$$

BEWEIS: Wir gehen von den Fourierintegralen von F und G aus:

$$F(\omega)G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u} du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-j\omega v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)e^{-j\omega(u+v)} du dv$$

Führe nun im letzten Integral die Substitution $u = t - \tau$, $v = \tau$ aus und beachte, daß die Jacobideterminante $\begin{vmatrix} u_t & u_\tau \\ v_t & v_\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ist:

$$F(\omega)G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-j\omega t} dt d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) dt$$

Nun ist der Ausdruck in der Klammer gleich $(f * g)(t)$, also:

$$F(\omega)G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)e^{-j\omega t} dt$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel 4.7 :

Aus Beispiel 4.4 sind folgende F -Korrespondenzen bekannt:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \circ \bullet F(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

$$g(t) = e^{-|t|} \circ \bullet G(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

Zunächst berechnen wir $f * g$:

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)f(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 e^{-|t-\tau|} d\tau$$

1. Falls $t > 1$ ist, so gilt: $|t - \tau| = t - \tau$ für alle $\tau \in [-1, 1]$:

$$(f * g)(t) = \int_{-1}^1 e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_{-1}^1 e^{\tau} d\tau = e^{-t}(e - e^{-1})$$

2. Falls $t < -1$ ist, so gilt: $|t - \tau| = \tau - t$ für alle $\tau \in [-1, 1]$:

$$(f * g)(t) = \int_{-1}^1 e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_{-1}^1 e^{-\tau} d\tau = e^t(e - e^{-1})$$

3. Falls $-1 \leq t \leq 1$ ist, so gilt: $|t - \tau| = t - \tau$ für $\tau < t$ und $|t - \tau| = \tau - t$, falls $\tau > t$ ist:

$$(f * g)(t) = \int_{-1}^t e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_t^1 e^{-(\tau-t)} d\tau = 2 - (e^t - e^{-t})e^{-1}$$

Somit gilt:

$$(f * g)(t) = \left\{ \begin{array}{l} (e - e^{-1})e^{-|t|}, \text{ für } |t| > 1 \\ 2 - 2e^{-1} \sinh t, \text{ für } |t| \leq 1 \end{array} \right\} \circ \bullet \frac{4 \sin \omega}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

4.2.4 Gerade und ungerade Funktionen

Ist die Originalfunktion f eine gerade oder eine ungerade Funktion, so kann man die Transformationsformel (4.55) auch in einer etwas modifizierten Form benutzen.

Satz 4.12 (Gerade und ungerade Funktionen)

Die Bildfunktion F einer geraden (bzw. ungeraden) F -transformierbaren Funktion f ist ebenfalls gerade (bzw. ungerade). Die Transformationsformel (4.55) vereinfacht sich dann zu:

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad \text{falls } f \text{ gerade ist} \quad (4.20)$$

$$F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt, \quad \text{falls } f \text{ ungerade ist} \quad (4.21)$$

Die Umkehrformeln können wie folgt geschrieben werden:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad \text{falls } f \text{ gerade ist} \quad (4.22)$$

$$f(t) = -\frac{j}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin(\omega t) d\omega, \quad \text{falls } f \text{ ungerade ist} \quad (4.23)$$

BEWEIS: Es ist $f(t)e^{-j\omega t} = f(t) \cos(\omega t) - j f(t) \sin(\omega t)$. Wir betrachten den Fall, dass $f(t)$ gerade ist; es ist dann $f(t) \cos(\omega t)$ gerade und $f(t) \sin(\omega t)$ ungerade (für jedes ω).

$$\begin{aligned} \implies F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt}_{=2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt}_{=0} \end{aligned}$$

$$\implies F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

Da nun $F(-\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(-\omega t) dt = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt = F(\omega)$ ist, ist F auch gerade.

Den Fall, dass f ungerade ist, behandelt man analog.

Aus der Umkehrformel erhält man durch analoge Vorgehensweise wie oben die speziellen Umkehrformeln für gerade bzw. ungerade Funktionen $F(\omega)$ \square

Beispiel 4.8 :

1. Betrachte die erste Funktion aus Beispiel 4.4.

$$f(t) := \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ für } |t| < a \\ 0, \text{ sonst} \end{array} \right\} \quad \text{mit } a > 0$$

Diese Funktion ist gerade. Wir führen die F-Transformation nach obigem Satz aus, zunächst für $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^a 1 \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\omega} \sin(\omega a)$$

Für $\omega = 0$ folgt: $F(0) = 2 \int_0^a 1 dt = 2a$.

2. Betrachte die zweite Funktion aus Beispiel 4.4. Die F-Transformierte der geraden Funktion $g(t) = e^{-\alpha|t|}$ mit $\alpha > 0$ wird berechnet:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(\omega t) dt \\ &= 2 \left[\frac{-\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} \right]_0^{t \rightarrow \infty} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Die Funktion $e^{-\alpha|t|}$ kann gemäß der Umkehrformel wie folgt dargestellt werden:

$$e^{-\alpha|t|} = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$$

4.2.5 Rücktransformation mit dem Residuenkalkül

Im folgenden geht es darum, zu einer vorgegebenen Bildfunktion $F(\omega)$ die zugehörige Originalfunktion $f(t)$ zu bestimmen. Es wird vorausgesetzt, dass $F(\omega)$ eine rationale Funktion ist, die in \mathbb{R} keine Polstellen besitzt, und deren Nennergrad größer als deren Zählergrad ist. Es wird die Fortsetzung $F(z)$ in die komplexe Ebene betrachtet. Im $z > 0$ und $\text{Im } z < 0$ bezeichnen die obere bzw. untere Halbebene der komplexen Ebene \mathbb{C} .

Satz 4.13 (Berechnung der Zeitfunktion aus der Bildfunktion)

Die Funktion $F(z) := p(z)/q(z)$ sei rational mit $\text{grad } p < \text{grad } q$, und besitze keinen Pol in \mathbb{R} . Die Pole seien

in $\text{Im } z > 0$ mit z_1, \dots, z_n , in $\text{Im } z < 0$ mit s_1, \dots, s_m

bezeichnet. Dann gibt es eine Funktion $f(t)$, so daß das Paar (f, F) eine F -Korrespondenz ist und man berechnet f nach:

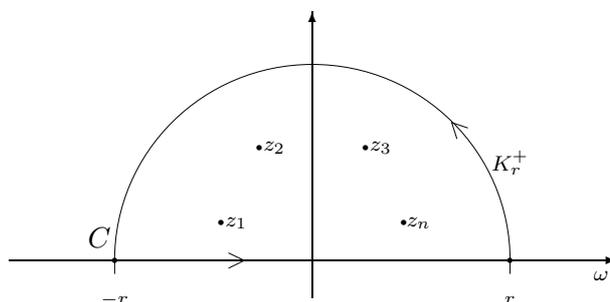
$$f(t) = \begin{cases} j \sum_{k=1}^n \text{res}(e^{jtz} F(z), z_k) & , \text{ für } t > 0 \\ -j \sum_{i=1}^m \text{res}(e^{jtz} F(z), s_i) & , \text{ für } t < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Beachte: Die erste Zeile liefert die Funktionswerte $f(t)$ für positive t , die zweite Zeile jene für negative t .

BEWEIS: Ausgangspunkt sei die Umkehrformel: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$. Integration über die unten skizzierte Kurve ergibt nach dem Residuensatz:

$$j \sum_{k=1}^n \text{res}(e^{jtz} F(z), z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r F(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{K_r^+} F(z) e^{jzt} dz \quad (4.25)$$

Wir zeigen nun, daß für $t > 0$ das letzte Integral für $r \rightarrow \infty$ verschwindet.



Mit $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ erhalten wir: $|e^{jtz}| = |e^{jtr(\cos \varphi + j \sin \varphi)}| = e^{-tr \sin \varphi}$. Im folgenden benutzen wir für den Kreisbogen K_r^+ die Parameterdarstellung $z(\varphi) =$

$re^{j\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Außerdem geht ein, daß nach Voraussetzung für hinreichend große $|z|$ gilt: $|zF(z)| \leq c$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_r} F(z)e^{jtz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |F(re^{j\varphi})| e^{-tr \sin \varphi} |rje^{j\varphi}| d\varphi \\ &= \int_0^\pi r |F(re^{j\varphi})| e^{-tr \sin \varphi} d\varphi \leq c \int_0^\pi e^{-tr \sin \varphi} d\varphi \\ &\leq 2c \int_0^{\pi/2} e^{-tr(\frac{2}{\pi})\varphi} d\varphi \rightarrow 0 \quad (\text{für } r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Benutzt wurde, daß $\sin \varphi$ auf $[0, \pi]$ symmetrisch verläuft und daß $\sin \varphi \geq (2/\pi)\varphi$ für $\varphi \in [0, \pi/2]$ ist. Damit gilt:

$$j \sum_{k=1}^n \text{res}(F(z)e^{jtz}, z_k) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r F(\omega)e^{j\omega t} d\omega =: f(t), \quad \text{für } t > 0$$

Wenn $t < 0$ vorausgesetzt wird, so wählt man den Integrationsweg spiegelbildlich in die untere Halbebene (negativ orientiert, daher Vorzeichen minus). Die Konvergenz dieses Integrals zeigt man analog. Auf Grund der Darstellung (4.25) macht man sich klar, daß f die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllt, so daß (f, F) ein Transformationspaar bildet. \square

Beispiel 4.9 :

Bestimme die Zeitfunktion $f(t)$ aus der Bildfunktion $F(\omega) = \frac{j}{\omega - ja}$, $a > 0$, mit Satz 4.13. $F(z) = \frac{j}{z - ja}$ besitzt einen einfachen Pol in $z_0 = ja$.

$$\text{res} \left(e^{j\omega z} \frac{j}{z - ja}, ja \right) = \lim_{z \rightarrow ja} \left\{ (z - ja)e^{jtz} \frac{j}{z - ja} \right\} = je^{-at}$$

Da in der unteren Halbebene kein Pol liegt, bekommen wir mit (4.24):

$$f(t) = \begin{cases} -e^{-at}, & \text{für } t > 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

4.3 Laplacetransformation

Der Fouriertransformation liegen Zeitfunktionen zugrunde, deren Argument t von $-\infty$ bis ∞ variiert. Solche Funktionen dienen der Beschreibung von Abläufen, die theoretisch von $-\infty$ bis ∞ beobachtet werden. Für die Behandlung zeitlich begrenzt wirksamer Ausgleichsvorgänge, wie sie beispielsweise beim Ein- oder Umschalten eines Systems entstehen, ist die Fouriertransformation ungeeignet. Ausgleichsvorgänge können oft als Anfangswertproblem mit einem linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden. Mit Hilfe der Laplacetransformation kann man solche Probleme besonders effizient lösen. Die Anfangsbedingungen werden dabei für den Zeitpunkt $t = 0$ festgelegt, d.h. die Zeitsignale werden ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wirksam. Um solche Funktionen auch im Rahmen der Fouriertransformation betrachten zu können, setzen wir fest:

$$f(t) := 0 \quad \text{für jedes } t < 0 \quad (4.26)$$

so dass f nun auf ganz \mathbb{R} definiert ist. $f(t)$ beschreibt sozusagen ein Zeitsignal, das zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird. Im gesamten Abschnitt gilt für jede Zeitfunktion $f(t)$ die **Bedingung (4.26)**. Außerdem sollen diese Funktionen (zumindest) **stückweise stetig** sein.

4.3.1 Einführung der Laplacetransformation

Als Laplaceintegral einer Funktion $f(t)$ bezeichnen wir das Integral:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{mit } s := x + j\omega \in \mathbb{C} \quad (4.27)$$

Dieses (uneigentliche) Integral hängt also von einem Parameter $s \in \mathbb{C}$ ab, sofern es konvergent ist.

Zunächst fragen wir nach Bedingungen, unter denen durch (4.27) eine Funktion $F(s)$ auf einer Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ definiert wird. Recht einfache hinreichende Bedingungen erhält man mit dem Begriff der absoluten Konvergenz. Dabei heißt das L -Integral (4.27) **absolut konvergent** für ein $s \in \mathbb{C}$, wenn

$$\int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-st}| dt$$

konvergent ist. Absolute Konvergenz hat stets Konvergenz im gewöhnlichen Sinne

zur Folge, weil bekanntlich die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| |e^{-st}| dt$$

Der folgende Satz beschreibt den **Bereich absoluter Konvergenz** für das Laplaceintegral (4.27).

Lemma 4.5 *Konvergiert das Laplaceintegral von f absolut für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, so trifft dies wenigstens auch für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ zu. Mit α_f bezeichnen wir das Infimum aller Zahlen aus \mathbb{R} mit der Eigenschaft, daß das L -Integral für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ absolut konvergiert.*

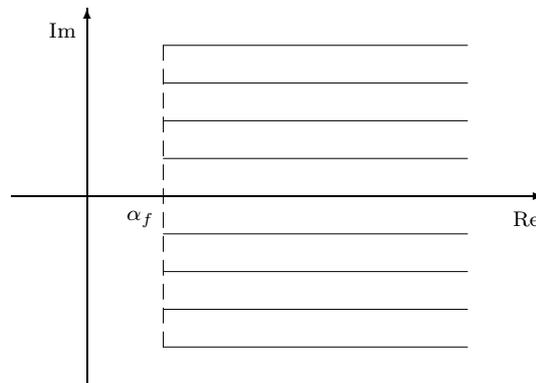
BEWEIS: Für $s = x + j\omega$ gilt die folgende einfache Aussage:

$$|e^{-st}| = |e^{-xt}e^{-j\omega t}| = |e^{-xt}| |e^{-j\omega t}| = e^{-xt} \tag{4.28}$$

Für $s = x + j\omega$ mit $x > x_0 := \operatorname{Re} s_0$ folgt wegen $e^{-xt} \leq e^{-x_0t}$:

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^\infty |f(t)| e^{-xt} dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-x_0t} dt = \int_0^\infty |f(t)e^{-s_0t}| dt \tag{4.29}$$

Das letzte Integral ist nach Voraussetzung konvergent. □



Obige Skizze zeigt den Bereich absoluter Konvergenz: $\operatorname{Re} s > \alpha_f$.

Definition 4.7 *Die Funktion $f(t)$, definiert für $t \geq 0$, heißt L -transformierbar, wenn das Laplaceintegral von f für wenigstens ein $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert. Die Funktion*

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

ist dann (wenigstens) auf der Halbebene $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ definiert. Sie heißt Laplace-transformierte von f . Das Paar (f, F) wird dann eine L -Korrespondenz genannt. Diese wird auch in der Form

$$f(t) \circ \text{---} \bullet F(s) \quad \text{oder} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

notiert. f heißt Zeit- oder Originalfunktion, F Bildfunktion.

Ein Nachteil der Fouriertransformation ist, daß viele Zeitfunktionen der Praxis nicht F -transformierbar sind. Dagegen umfaßt die Klasse der L -transformierbaren Funktionen die für die praktische Anwendung wichtigen Zeitfunktionen, wie man dem folgenden Satz entnehmen kann.

Satz 4.14 (Hinreichende Bedingung für L -Transformierbarkeit)

Zu einer vorgegebenen Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ gebe es konstante Zahlen k, M , so daß für alle $t \geq 0$ die Bedingung

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \tag{4.30}$$

erfüllt ist. Dann ist das Laplaceintegral von f zumindest auf der Halbebene $\operatorname{Re} s > k$ absolut konvergent. Insbesondere ist dann f L -transformierbar.

BEWEIS: Sei $s := x + j\omega \in \mathbb{C}$ mit $x > k$ gewählt. Dann gilt:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-xt} dt \leq \int_0^{\infty} Me^{kt} e^{-xt} dt = M \int_0^{\infty} e^{(k-x)t} dt = \frac{M}{x-k}$$

□

Der obige Satz besagt also: Wenn der Graph der Betragsfunktion $|f|$ für jedes positive t unter dem einer Funktion des Typs Me^{kt} liegt, so besitzt f eine L -Transformierte. Dabei sind k, M feste, beliebig wählbare Zahlen.

Die folgenden Funktionen $f(t)$, definiert für $t \geq 0$, sind zum **Beispiel** L -transformierbar: $\sin(\alpha t)$, $\cos(\alpha t)$, $e^{\alpha t}$, e^{-t^2} , $\cosh(\alpha t)$, $\sinh(\alpha t)$, t^α , a^t (a positiv). Beachte dabei: $t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, $a^t = e^{t \ln a}$. Dagegen erfüllen die folgenden Funktionen die Bedingung (4.30) **nicht**: e^{t^2} , $e^{t\sqrt{t}}$, $e^{(e^t)}$, t^t (beachte: $t^t = e^{t \ln t}$). Man kann zeigen: sie sind nicht L -transformierbar.

Beachte: Nach unserer generellen Voraussetzung setzen wir (in diesem Abschnitt) für jede dieser Funktionen: $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$ voraus.

Beispiel 4.10 :

1) Die so genannte Heavisidefunktion σ ist wie folgt definiert (s. Skizze unten):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne die L -Transformierte von σ :

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} \sigma(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-(x+j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

Falls $x > 0$ ist, so gilt: $e^{-xt}e^{-j\omega t} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) (denn: $|e^{-xt}e^{-j\omega t}| = e^{-xt}$).

Falls $x \leq 0$ ist, so existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt}e^{-j\omega t}$ nicht.

$$\text{Somit gilt: } \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \quad (\text{Re } s > 0).$$

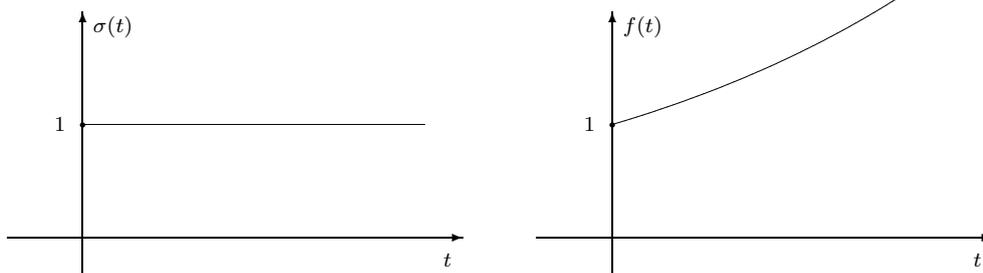
2) Berechne die L -Transformierte der folgenden Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ sei:

$$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$$

Im Fall $x > a$ erhält man $e^{(a-x)t}e^{-j\omega t} \rightarrow 0$ (für $t \rightarrow \infty$). Im Fall $x \leq a$ ist der Limes für $t \rightarrow \infty$ nicht vorhanden (Begründung wie oben).

$$\text{Somit gilt: } \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{Re } s > a)$$



Ist $a \in \mathbb{C}$, so erhält man formal dasselbe Ergebnis: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, wobei $\text{Re } s > \text{Re } a$ zu fordern ist.

Auf die Laplacetransformierte F einer Zeitfunktion f können die Aussagen der Funktionentheorie angewendet werden. Es gilt nämlich der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 4.15 (Analytizität der Bildfunktion)

Die Bildfunktion $F(s)$ einer Zeitfunktion $f(t)$ ist auf der Halbebene $\operatorname{Re} s > \alpha_f$, auf der das Laplaceintegral absolut konvergiert, eine analytische Funktion.

Eine **nützliche Konsequenz**, die sich aus dem Satz ergibt, ist, daß bei der Arbeit mit der Laplacetransformation die Konvergenzhalbebene $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ nicht weiter beachtet werden muß: Zunächst ist $F(s)$ durch das Laplaceintegral auf dieser Halbebene definiert und dort analytisch. In den praktisch wichtigen Fällen ist dann $F(s)$ durch eine Formel festgelegt, die über diese Halbebene hinausreicht, so daß also F auf einem Gebiet G , das die „Konvergenzhalbebene“ des Laplaceintegrals von $f(t)$ umfaßt, eine analytische Funktion ist. Wegen des Identitätssatzes ist diese „analytische Fortsetzung“ von F auf G aber eindeutig bestimmt, so daß die Halbebene $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ beim Rechnen nicht weiter notiert werden muß. Die Laplacetransformierten

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

werden also als analytische Funktionen auf den Gebieten $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bzw. $G := \mathbb{C} \setminus \{a\}$ betrachtet.

Wie die Fouriertransformation so ist auch die Laplacetransformation **linear**. Man kann leicht zeigen, daß aus $f(t) \circ \bullet F(s)$, $g(t) \circ \bullet G(s)$ für die Linearkombination von f und g folgt:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \bullet \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Die Konvergenzhalbebene für die Linearkombination ist dann mindestens so groß wie die Halbebene $\operatorname{Re} s > \max(\alpha_f, \alpha_g)$. Bei den folgenden Transformationen ist der Vollständigkeit halber noch die Konvergenzhalbebene angegeben.

Beispiel 4.11 :

- 1) $\cosh(\alpha t) = \frac{1}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \circ \bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha} \right) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}$
- 2) $\sinh(\alpha t) = \frac{1}{2} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \circ \bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha} \right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
- 3) $\cos(\alpha t) = \frac{1}{2} (e^{\alpha j t} + e^{-\alpha j t}) \circ \bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\alpha j} + \frac{1}{s+\alpha j} \right) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

$$4) \sin(\alpha t) = \frac{1}{2} (e^{\alpha j t} - e^{-\alpha j t}) \circ \bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \alpha j} - \frac{1}{s + \alpha j} \right) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

Die Konvergenzhalbebene für die Funktionen 1) bis 4) ist: $\operatorname{Re} s > |\alpha|$.

5) Die Heavisidefunktion mit Sprungstelle in $a > 0$ lautet:

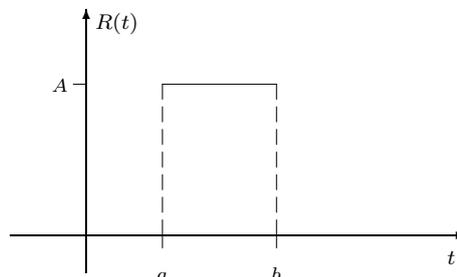
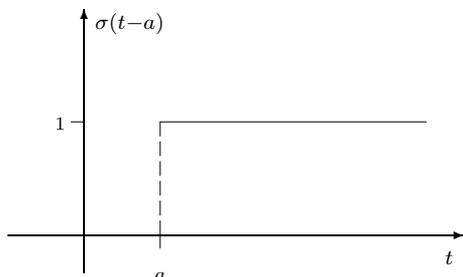
$$\sigma(t - a) = \begin{cases} 1, & \text{für } t \geq a \\ 0, & \text{für } t < a \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t - a)\} = \int_a^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=a}^{t \rightarrow \infty} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Für die Konvergenz ist wieder $\operatorname{Re} s > 0$ zu fordern.

6) Für konstante Zahlen a, b mit $0 \leq a < b$ definieren wir die sog. Rechteckfunktion durch $R(t) = A \cdot (\sigma(t - a) - \sigma(t - b))$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}\{R(t)\} = A \cdot (\mathcal{L}\{\sigma(t - a)\} - \mathcal{L}\{\sigma(t - b)\}) = A \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$



Die Bildfunktion $F(s)$ zu einer vorgegebenen (L -transformierbaren) Zeitfunktion $f(t)$ ist auf Grund des Laplaceintegrals eindeutig bestimmt. Wie bei der Fouriertransformation so gibt es auch bei der Laplacetransformation eine **Umkehrformel**. Aus ihr geht hervor, daß die Funktionswerte $f(t)$ an jedem Stetigkeitspunkt t von f durch die Bildfunktion $F(s)$ eindeutig festgelegt sind.

Satz 4.16 (Umkehrformel) $F(s)$ sei Bildfunktion von $f(t)$ unter der Laplacetransformation. Für festes positives x mit $x > \alpha_f$ gilt die folgende Darstellung:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x-Tj}^{x+Tj} F(s) e^{st} ds \quad (\text{für } t > 0)$$

BEWEIS: Ausgangspunkt sei das Laplaceintegral in der Form

$$F(x + j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}e^{-j\omega t} dt$$

Wir setzen $f_x(t) := f(t)e^{-xt}$, wobei $f(t) = 0$ für $t < 0$ zu beachten ist. Da f_x die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllt, liefert die dortige Umkehrformel

$$\frac{f_x(t+) + f_x(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T F(x + j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit e^{xt} . Daraus folgt:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T F(x + j\omega)e^{(x+j\omega)t} d\omega$$

Mit $s = x + j\omega$ und dementsprechend mit $ds = jd\omega$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x-Tj}^{x+Tj} F(s)e^{st} ds$$

□

4.3.2 Abbildungsgesetze

Es handelt sich dabei um Regeln, die zum Ausdruck bringen, wie bestimmte Operationen und Verknüpfungen, die für Funktionen des Zeitbereichs durchgeführt werden, sich im Bildbereich widerspiegeln. Generell wollen wir dabei **voraussetzen**, daß jede Zeitfunktion f , die transformiert werden soll, die Bedingung („Wachstumsbedingung“) (4.30) erfüllt.

Differentiation und Integration im Zeitbereich

Satz 4.17 (Differentiationsatz)

Die Zeitfunktion f sei für $t > 0$ wenigstens $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar und $f^{(n)}$ sei auf $(0, \infty)$ zumindest noch als stückweise stetige Funktion vorhanden. Dann gilt:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - sf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Speziell haben wir also für $n = 1$ bis 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0+) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+) \\ \mathcal{L}\{f'''(t)\} &= s^3F(s) - s^2f(0+) - sf'(0+) - f''(0+) \\ \mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} &= s^4F(s) - s^3f(0+) - s^2f'(0+) - sf''(0+) - f'''(0+) \end{aligned}$$

BEWEIS: Der Nachweis für $n = 1$ ist sehr einfach. Anwendung der Regel für Produktintegration ergibt:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = \left(f(t)e^{-st}\right)_{t=0+}^{t \rightarrow \infty} + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Wegen (4.30) gilt für $\operatorname{Re} s > k$: $f(t)e^{-st} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

$$\implies \mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0+) + sF(s)$$

Aus dieser Beziehung erhält man für $f''(t)$:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0+) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f'(0+) - sf(0+) + s^2F(s)$$

Entsprechend läßt sich $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ aus der Beziehung für $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ berechnen. Die Formel für allgemeines n beweist man mittels vollständiger Induktion. \square

Mit Hilfe des Differentiationsatzes werden wir ein Anfangswertproblem für eine DGL mit konstanten Koeffizienten in ein **algebraisches Problem** überführen.

Beispiel 4.12 :

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$x'' - 3x' + 2x = e^{-t}, \quad x(0+) = 0, \quad x'(0+) = -1$$

Transformation der Terme der linken Seite in den Bildbereich ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''\} &= s^2X(s) - \underbrace{s x(0+)}_{=0} - \underbrace{x'(0+)}_{=-1} = s^2X(s) + 1 \\ \mathcal{L}\{x'\} &= sX(s) - x(0+) = sX(s) \\ \mathcal{L}\{x\} &= X(s) \end{aligned}$$

Transformation des AWP in den Bildbereich ergibt nun eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten $X(s)$:

$$\begin{aligned} s^2X(s) + 1 - 3sX(s) + 2X(s) &= \frac{1}{s+1} \\ \iff (s^2 - 3s + 2)X(s) &= \frac{1}{s+1} - 1 = \frac{-s}{s+1} \\ \iff X(s) &= -\frac{s}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} \\ \iff X(s) &= -\frac{s}{(s+1)(s-1)(s-2)} \end{aligned}$$

Führe nun eine PBZ für den Term der rechten Seite durch; der Ansatz dafür lautet:

$$\frac{-s}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

Eine Nebenrechnung ergibt: $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{6}$, $C = -\frac{4}{6}$. Damit kann man $X(s)$ in der nachfolgend angegebenen Weise schreiben und leicht in den Zeitbereich zurücktransformieren:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s-1} - \frac{4}{s-2} \right) \\ x(t) &= \frac{1}{6} (e^{-t} + 3e^t - 4e^{2t}) \quad \square \end{aligned}$$

Ist f eine stückweise stetige Funktion auf $[0, \infty)$, so erhalten wir durch

$$h(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (t \geq 0) \quad (4.31)$$

eine stetige und stückweise differenzierbare Funktion h auf $[0, \infty)$. In jedem Stetigkeitspunkt t von f gilt: $h'(t) = f(t)$ (s. Mathematik B, Stammfunktion). Daraus folgt mit Satz 4.17: $sH(s) - h(0+) = F(s)$. Da in diesem Fall $h(0+) = 0$ ist, erhält man somit: $H(s) = F(s)/s$. Damit ist der folgende Satz begründet.

Satz 4.18 (Integrationsatz) Aus $f(t) \circ \bullet F(s)$ folgt:

$$h(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$$

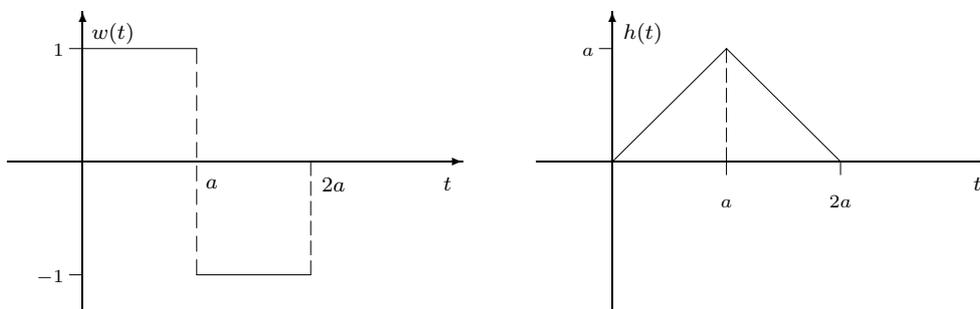
Beispiel 4.13 :

Betrachte für $a > 0$ eine Schwingung aus Rechteckfunktionen:

$$w(t) := \sigma(t) - \sigma(t-a) - (\sigma(t-a) - \sigma(t-2a)) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t < a \\ -1, & \text{für } a \leq t < 2a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $h(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau$ berechnet man folgende Funktionsvorschrift:

$$h(t) = \begin{cases} t, & \text{für } 0 \leq t < a \\ 2a - t, & \text{für } a \leq t < 2a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Wir wenden den Integrationsatz auf obige Funktionen an: an:

$$w(t) = \sigma(t) - 2\sigma(t - a) + \sigma(t - 2a) \circ \bullet \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{s} = \frac{(1 - e^{-as})^2}{s}$$

$$\implies h(t) := \int_0^t w(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}$$

Beispiel 4.14 :

Bekanntlich gilt: $\sigma(t) \circ \bullet 1/s$. Mit dem Integrationsatz folgt daraus:

$$t = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1/s}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$t^2 = 2 \int_0^t \tau d\tau \circ \bullet 2 \frac{1/s^2}{s} = \frac{2}{s^3}$$

$$t^3 = 3 \int_0^t \tau^2 d\tau \circ \bullet 3 \frac{2/s^3}{s} = \frac{3!}{s^4}$$

So fortfahrend folgt allgemein: $\frac{1}{s^n} \bullet \circ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

Anwendungen auf Differentialgleichungen

Nach dem Beispiel 4.12 liegt es auf der Hand, daß wir die Methode der Laplacetransformation - gestützt auf den Differentiationsatz - auf das AWP einer allgemeinen **linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** anwenden können. Ein solches Problem besitzt die Form:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = f \tag{4.32}$$

$$x(0+) = \beta_0, x'(0+) = \beta_1, \dots, x^{(n-1)}(0+) = \beta_{n-1} \tag{4.33}$$

Die Koeffizienten a_1, \dots, a_{n-1} , die Anfangswerte $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ und die Störfunktion $f(t)$ (für $t \geq 0$) sind dabei vorgegeben. Wir transformieren das AWP (4.32)(4.33) in den Bildbereich. Nach der Transformation bringen wir alle Terme der Form $\beta_i s^k$ (d.h. jene, die aus den Anfangswerten (4.33) hervorgehen) auf die rechte Seite der Gleichung und fassen diese Terme zu einem Polynom $q(s)$ zusammen. (Es kann höchstens den Grad $n - 1$ besitzen.) Im Bildbereich liegt damit eine Gleichung der folgenden Form vor:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) \cdot X(s) = F(s) + q(s) \quad (4.34)$$

Als **charakteristisches Polynom** bezeichnen wir das Polynom

$$p(s) := s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

Auflösen der Gleichung (4.34) liefert eine Funktionvorschrift für $X(s)$.

$$X(s) = \frac{1}{p(s)}(F(s) + q(s)) \quad (4.35)$$

Wir bemerken, daß die isolierten Singularitäten von $X(s)$ gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Die zugehörige Originalfunktion $x(t)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des AWP (4.32)(4.33)).

Beispiel 4.15 :

Wir erläutern die Vorgehensweise nochmals für den Fall $n = 2$. Das Anfangswertproblem (4.32)(4.33) besitzt dann die Gestalt:

$$x'' + a_1x' + a_0x = f, \quad x(0+) = \beta_0, \quad x'(0+) = \beta_1$$

Transformation in den Bildbereich und anschließende Umstellung ergibt:

$$\begin{aligned} s^2X(s) - \beta_0s - \beta_1 + a_1(sX(s) - \beta_0) + a_0X(s) &= F(s) \\ \implies \underbrace{(s^2 + a_1s + a_0)}_{=:p(s)} X(s) &= F(s) + \underbrace{(\beta_0s + \beta_1 + a_1\beta_0)}_{=:q(s)} \end{aligned}$$

Schließlich ist $X(s) = (F(s) + q(s))/p(s)$ zurückzutransformieren.

Ganz ähnlich geht man vor, wenn ein Anfangswertproblem mit einem **linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten** zu lösen ist. Ein solches liegt in **Normalform** vor, wenn es die folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + f_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n \end{aligned}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten:

$$x_1(0+) = \beta_1, x_2(0+) = \beta_2, \dots, x_n(0+) = \beta_n$$

Hierin sind die Koeffizienten a_{ik} , die Funktionen $f_i(t)$ (für $t \geq 0$) und die Anfangswerte β_i (mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$) vorgegeben. Die Funktionen $x_i(t)$ sind gesucht. Mit der Matrix $A := (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und den Vektoren

$$\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

können wir das AWP in der folgenden übersichtlichen Vektorschreibweise angeben:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \mathbf{f} \\ \mathbf{x}(0+) = \beta \end{cases} \quad (4.36)$$

Das System (4.36) wird nun in den Bildbereich unter Beachtung der Beziehung $\dot{\mathbf{x}}(t) \circ \rightarrow \bullet s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0+)$ transformiert:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0+) &= A \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{F}(s) \\ \Leftrightarrow sE \cdot \mathbf{X}(s) - A \cdot \mathbf{X}(s) &= \mathbf{F}(s) + \mathbf{x}(0+) \\ \Leftrightarrow (sE - A) \cdot \mathbf{X}(s) &= \mathbf{F}(s) + \beta \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Eigenwerte der Matrix A seien mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ bezeichnet. Wir wissen, daß für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ die Matrix $sE - A$ invertierbar ist; für solche s ist (4.37) eindeutig nach $\mathbf{X}(s)$ auflösbar:

$$\mathbf{X}(s) = (sE - A)^{-1}(\mathbf{F}(s) + \beta) \quad (4.38)$$

Die Eigenwerte $s = \lambda_i$ sind die isolierten Singularitäten für die Komponenten von $\mathbf{X}(s)$. Rücktransformation von (4.38) in den Zeitbereich liefert die eindeutig bestimmte Lösung des AWP (4.36). Zur Verdeutlichung der Methode rechnen wir ein Beispiel durch.

Beispiel 4.16 :

Zu bestimmen sei die Lösung $(x(t), y(t))^T$ des folgenden AWP:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x(0+) \\ y(0+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformation in den Bildbereich ergibt:

$$\begin{pmatrix} sX(s) - x(0+) \\ sY(s) - y(0+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen und Umstellen bekommen wir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} sX(s) \\ sY(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/s + 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+s & 1 \\ -1 & 3+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2s} \begin{pmatrix} s+2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die linksstehende Matrix ist regulär für alle $s \in \mathbb{C}$, die keine Eigenwerte von A sind. Für solche s ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Wir lösen hier das LGS mit der inversen Matrix auf:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{(s+2)^2} \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2s(s+2)^2} \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2s(s+2)} \begin{pmatrix} s+3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mittels Partialbruchzerlegung und anschließender Rücktransformation gilt:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+3}{2s(s+2)} = \frac{3/4}{s} - \frac{1/4}{s+2} \circ \bullet \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} \quad (t \geq 0) \\ Y(s) &= \frac{1}{2s(s+2)} = \frac{1/4}{s} - \frac{1/4}{s+2} \circ \bullet \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

Somit folgt:

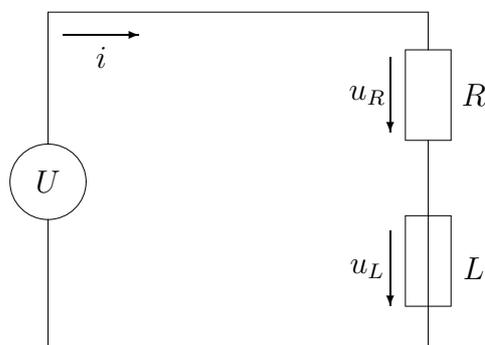
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^{-2t}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

Beispiel 4.17 :

Wir wollen mit einfachen Beispielen andeuten, daß die Laplacetransformation für die Netzwerk-Analyse ein nützliches Hilfsmittel darstellt. Die Eingangsspannung sei in beiden Fällen durch $u(t) = \hat{u}\sigma(t)$, $t \geq 0$, gegeben.

1) Für die folgende Schaltung gilt für $t > 0$ folgendes AWP (s. Skizze 1):

$$L i'(t) + R i(t) = \hat{u}\sigma(t), \quad i(0+) = 0$$



Transformation des AWP in den Bildbereich führt zur folgenden Gleichung, die mit elementaren Methoden nach $I(s)$ auflösbar ist:

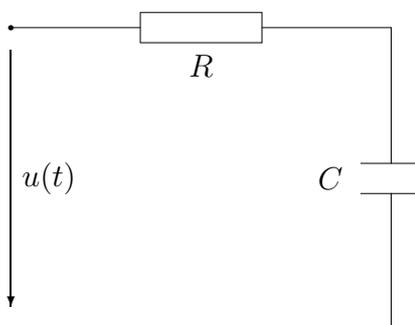
$$\begin{aligned}
 LsI(s) + RI(s) &= \frac{\hat{u}}{s} \\
 \Leftrightarrow I(s) &= \frac{\hat{u}}{(Ls + R)s} = \frac{\hat{u}}{Ls \left(s + \frac{R}{L} \right)} \\
 \Leftrightarrow I(s) &= \frac{\hat{u}}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) \quad (\text{Partialbruchzerlegung})
 \end{aligned}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich führt zur Lösung des AWP:

$$i(t) = \frac{\hat{u}}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right), \quad t \geq 0$$

- 2) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Kondensator der folgenden RC -Reihenschaltung mit der Ladung $q(0+)$ belegt. Wir erhalten mit Kirchhoff:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \left(\int_0^t i(\tau) d\tau + q(0+) \right) = \hat{u}\sigma(t)$$



Mit Hilfe des Integrationsssatzes erhält man im Bildraum:

$$\begin{aligned} RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{q(0+)}{Cs} &= \frac{\hat{u}}{s} \\ \Leftrightarrow \frac{RCs + 1}{Cs} I(s) &= \frac{1}{s} \left(\frac{C\hat{u} - q(0+)}{C} \right) \\ \Leftrightarrow I(s) &= \frac{C\hat{u} - q(0+)}{RC \left(s + \frac{1}{RC} \right)} \end{aligned}$$

Die Originalfunktion dazu lautet, wenn wir $T := RC$ setzen:

$$i(t) = \frac{C\hat{u} - q(0+)}{T} e^{-(1/T)t}, \quad t \geq 0$$

Der Faltungssatz

Im Abschnitt 4.2 haben wir das Faltungsprodukt $f * g$ zweier Zeitfunktionen f, g definiert durch:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad (4.39)$$

Die Zeitfunktionen dieses Kapitels erfüllen stets die Bedingung $f(x) = 0$ für $x < 0$. Für $x := t - \tau$ bedeutet dies, daß $f(t - \tau) = 0$ ist für $\tau > t$. Also ist $f(t - \tau)g(\tau)$ null, wenn $\tau \notin [0, t]$ ist. Damit können wir (4.39) wie folgt schreiben:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

Satz 4.19 (Faltungssatz) Aus $f \circ \bullet \bullet F$ und $g \circ \bullet \bullet G$ folgt:

$$F(s) \cdot G(s) \bullet \bullet \bullet (f * g)(t)$$

BEWEIS: Wir können uns kurz fassen, weil die Begründung fast wörtlich mit derjenigen des Satzes 4.11 übereinstimmt:

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-su} du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-sv} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)e^{-s(u+v)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-st} d\tau dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} \end{aligned}$$

Dabei wurde $t = u + v$ und $\tau = v$ substituiert. □

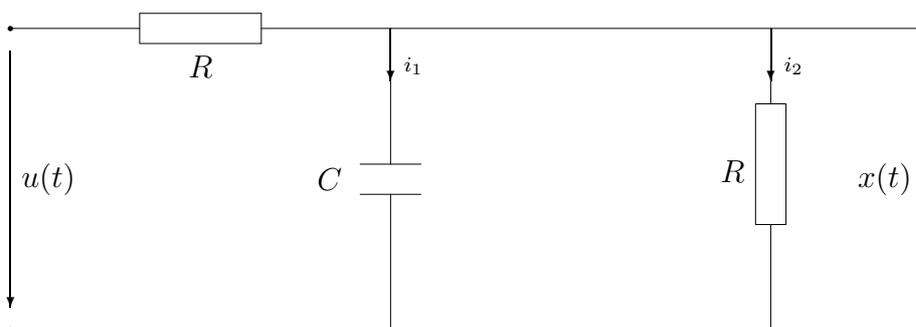
Beispiel 4.18 :

Für $a \neq b$ sei $F(s) := \frac{1}{s-a}$, $G(s) := \frac{1}{s-b}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-a)(s-b)} \circ \bullet e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{a(t-\tau)} e^{b\tau} d\tau = e^{at} \int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau \\ &= \frac{e^{at}}{b-a} e^{(b-a)\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} \end{aligned}$$

Beispiel 4.19 :

In der folgenden Schaltung soll die Ausgangsspannung $x(t)$ in Abhängigkeit der Eingangsspannung $u(t)$ ausgedrückt werden. Der Kondensator sei bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ladungsfrei.



Da für die Spannung $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{I_1(s)}{Cs}$ gilt, erhält man im Bildbereich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} R(I_1(s) + I_2(s)) + \frac{I_1(s)}{Cs} &= U(s) \\ -\frac{I_1(s)}{Cs} + RI_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Wir sind nur an $I_2(s)$ interessiert. Einsetzen von $I_1(s) = RCsI_2(s)$ in die erste Gleichung und Auflösen nach $I_2(s)$ ergibt:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{U(s)}{R(RCs + 2)} \\ \Rightarrow X(s) = RI_2(s) &= \frac{1}{RCs + 2} U(s) \end{aligned}$$

Mit $T := RC$ folgt unter Verwendung des Faltungssatzes:

$$X(s) = \frac{1}{T(s + 2/T)} U(s) \bullet \circ x(t) = \frac{1}{T} e^{-(2/T)t} * u(t)$$

Weitere Regeln

Da die Laplacetransformation der Fouriertransformation formal sehr ähnlich ist, überrascht es nicht, daß im Grunde alle Abbildungsgesetze der einen Transformation in verwandter Form auch bei der anderen auftreten. Wir geben einige dieser Regeln an, wobei die „einfachen Beweise“ nicht ausführen. a bezeichne dabei eine positive reelle Zahlen, b darf beliebig komplex sein.

Zeitverschiebung	$f(t - a)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$e^{-as} F(s)$
Verschiebung im s -Bereich	$e^{bt} f(t)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$F(s - b)$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Differentiation im s -Bereich	$(-t)^n f(t)$	$\circ \rightarrow \bullet$	$F^{(n)}(s)$

Wir erläutern einige dieser Regeln an Hand von Beispielen.

Beispiel 4.20 :

- 1) Man macht sich mit anschaulichen Mitteln klar, daß für die Funktion

$$q(t) := \begin{cases} t, & \text{für } t \in [0, a) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die folgende Darstellung gilt: $q(t) = t(\sigma(t) - \sigma(t - a))$. Daraus erhält mit Hilfe der Zeitverschiebungsregel:

$$\begin{aligned} q(t) &= t\sigma(t) - (t - a)\sigma(t - a) - a\sigma(t - a) \\ \circ \rightarrow \bullet & \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s^2} - \frac{ae^{-as}}{s} = \frac{1 - e^{-as} - ase^{-as}}{s^2} \end{aligned}$$

- 2) Die links stehenden Transformationspaare sind bekannt, mit der Verschiebung im s -Bereich erhält man daraus die rechts stehenden:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha t) \circ \rightarrow \bullet \frac{s}{s^2 + \alpha^2} &\Rightarrow e^{bt} \cos(\alpha t) \circ \rightarrow \bullet \frac{s - b}{(s - b)^2 + \alpha^2} \\ \sin(\alpha t) \circ \rightarrow \bullet \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} &\Rightarrow e^{bt} \sin(\alpha t) \circ \rightarrow \bullet \frac{\alpha}{(s - b)^2 + \alpha^2} \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \circ \rightarrow \bullet \frac{1}{s^n} &\Rightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{bt} \circ \rightarrow \bullet \frac{1}{(s - b)^n} \end{aligned}$$

4.3.3 Methoden der Rücktransformation

Liegt eine Lösung des zu bearbeitenden Problems im Bildbereich vor, so stellt sich die Aufgabe, diese in den Zeitbereich zurückzutransformieren. Wir stellen die gängigsten Methoden, die diesem Zweck dienen, vor.

Korrespondenztafeln

In der Literatur gibt es sehr umfangreiche Korrespondenztafeln. In Verbindung mit geeigneten Abbildungsgesetzen stellen sie eine sehr effiziente Methode der Rücktransformation dar. Wichtige, uns bereits bekannte Korrespondenzen stellen wir in der folgenden **Liste** („kleine Korrespondenztafel“) zusammen. Im Anhang zu diesem Skript befindet sich eine umfassende Korrespondenztafel.

$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$	
$\sigma(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re} s > 0$	$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re} s > a$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\operatorname{Re} s > b$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$	$e^{bt} \cos(\alpha t)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + \alpha^2}$	$\operatorname{Re} s > b$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re} s > 0$	$e^{bt} \sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-b)^2 + \alpha^2}$	$\operatorname{Re} s > b$
$\frac{t^{n-1} e^{bt}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-b)^n}$	$\operatorname{Re} s > b$	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\operatorname{Re} s > \alpha $
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	$\operatorname{Re} s > 0$	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	$\operatorname{Re} s > \alpha $

Partialbruchzerlegung

Bekannt ist, daß eine rationale Funktion

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \text{ mit } \operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$$

in Partialbrüche zerlegt werden kann. (Ist die Bedingung $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$ nicht erfüllt, so ist Polynomdivision durchzuführen; die folgenden Überlegungen können dann auf den Divisionsrest angewandt werden.) Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $Q(s)$ mit den Vielfachheiten m_1, \dots, m_k , so gibt es zu jedem a_i

Koeffizienten $A_{i1}, \dots, A_{im_i} \in \mathbb{C}$, so daß eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{A_{i1}}{s - a_i} + \frac{A_{i2}}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{im_i}}{(s - a_i)^{m_i}} \right) \quad (4.40)$$

gilt. Auf Grund der Transformationsformel

$$\frac{1}{(s - a)^n} \bullet \longleftarrow \circ \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$$

kann man (4.40) zurücktransformieren. (Eventuell auftretende komplexe e -Funktionen sollte man in geeigneter Weise zu reellen Funktionen zusammenfassen.)

Beispiel 4.21 :

Die rationale Funktion

$$F(s) = \frac{2s^2 - 9s + 19}{(s + 3)(s - 1)^2} \quad (4.41)$$

wird einer Partialbruchzerlegung unterzogen, ausgehend vom Ansatz:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A}{s + 3} + \frac{B_1}{s - 1} + \frac{B_2}{(s - 1)^2} \\ &= \frac{(A + B_1)s^2 + (-2A + 2B_1 + B_2)s + A - 3B_1 + 3B_2}{(s + 3)(s - 1)^2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ein Koeffizientenvergleich von (4.42) mit (4.41) führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$A + B_1 = 2, \quad -2A + 2B_1 + B_2 = -9, \quad A - 3B_1 + 3B_2 = 19$$

mit der Lösung: $A = 4$, $B_1 = -2$, $B_2 = 3$. Somit folgt:

$$F(s) = \frac{4}{s + 3} - \frac{2}{s - 1} + \frac{3}{(s - 1)^2} \circ \longrightarrow \bullet 4e^{-3t} - 2e^t + 3te^t = f(t)$$

In dem **Spezialfall**, daß alle Nullstellen a_1, \dots, a_k von $Q(s)$ **einfach** sind, besitzt die Partialbruchzerlegung die Form:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - a_1} + \frac{A_2}{s - a_2} + \dots + \frac{A_k}{s - a_k}$$

Bekannt ist (Math.I), daß sich dann die Koeffizienten A_k nach der Formel

$$A_k = \lim_{s \rightarrow a_k} \left[(s - a_k) \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \quad (4.43)$$

berechnen lassen, die gelegentlich **Heavisidesche Formel** genannt wird.

Beispiel 4.22 :

Die rationale Funktion

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

besitzt die Partialbruchdarstellung $F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$ mit

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s-1}{s+2} = -2 \quad A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s-1}{s+1} = 3$$

$$F(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad -2e^{-t} + 3e^{-2t} = f(t)$$

Residuenkalkül

Wie aus Satz 4.16 hervorgeht, gilt für die Laplacetransformation die folgende Umkehrformel:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x-Tj}^{x+Tj} F(s)e^{st} ds \quad (\text{für } t > 0) \quad (4.44)$$

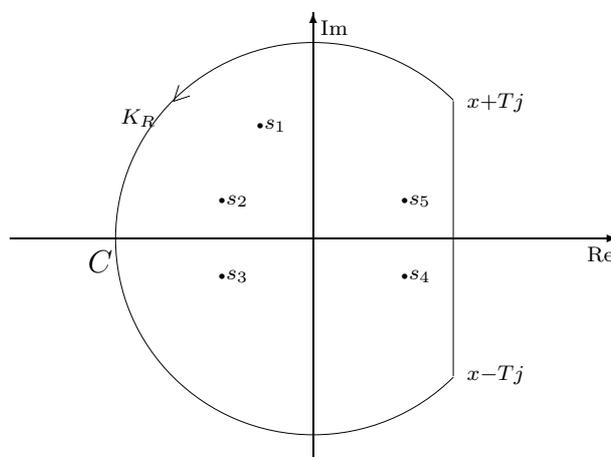
Diese Formel bildet die Grundlage für die Entwicklung einer sehr effizienten Methode zur Berechnung der Zeitfunktion aus der zugehörigen Bildfunktion.

Dazu nehmen wir an, $F(s)$ möge in \mathbb{C} die endlich vielen isolierten Singularitäten s_1, \dots, s_m besitzen und sei auf $\mathbb{C} \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$ analytisch. Wir wählen eine geschlossene, positiv orientierte Kurve C (sh. Skizze), die sich aus dem Kreisbogen K_R und der Strecke $[x-Tj, x+Tj]$ zusammensetzt. R sei so groß gewählt, daß die Singularitäten s_1, \dots, s_m im Inneren von C liegen sollen. Nach dem Residuensatz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{x-Tj}^{x+Tj} F(s)e^{st} ds &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(s)e^{st} ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{K_R} F(s)e^{st} ds \\ &= \sum_{k=1}^m \text{res}(F(s)e^{st}, s_k) - \frac{1}{2\pi j} \int_{K_R} F(s)e^{st} ds \end{aligned} \quad (4.45)$$

Man kann nun beweisen (was weiter unten geschieht), daß dieses letzte Integral, wenn man $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ voraussetzt, gegen null strebt. Für $R \rightarrow \infty$ (somit auch für $T \rightarrow \infty$) geht dann (4.45) unter Beachtung von (4.44) über in

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \sum_{k=1}^m \text{res}(F(s)e^{st}, s_k) \quad (4.46)$$



Zusammenfassend erhalten wir den folgenden nützlichen Satz:

Satz 4.20 (Rücktransformation mit Residuenkalkül)

$F(s)$ sei mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten s_1, \dots, s_m auf \mathbb{C} analytisch und genüge der Bedingung $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. Dann gilt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \text{res}(F(s)e^{st}, s_k), \quad \text{für } t > 0$$

Merke: Jede **rationale** Funktion $F(s) := p(s)/q(s)$ mit $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ erfüllt die Voraussetzungen dieses Satzes.

Beispiel 4.23 :

Wir betrachten für $a \neq 0$ (a fest) die folgende rationale Funktion:

$$F(s) := \frac{1}{s^2(s-a)}$$

Wir bemerken, daß F in $s = a$ einen einfachen Pol, in $s = 0$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt:

$$\begin{aligned} \text{res}(e^{st}F(s), a) &= \lim_{s \rightarrow a} \frac{e^{st}}{s^2} = \frac{e^{at}}{a^2} \\ \text{res}(e^{st}F(s), 0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{e^{st}}{s-a} = -\frac{at+1}{a^2} \end{aligned}$$

Nach obigem Satz ist die Zeitfunktion die Summe dieser Residuen:

$$f(t) = \frac{e^{at} - at - 1}{a^2}$$

Ergänzungen*

Vervollständigung des Beweises von Satz 4.20:

Um den **Beweis** von Satz 4.20 zu vervollständigen, bleibt nachzutragen, daß unter der Voraussetzung

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \tag{4.47}$$

die folgende Konvergenz (für festes $t \geq 0$) gilt: $\int_{K_R} F(s)e^{st} ds \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$. Sei R_0 so groß gewählt, daß alle Singularitäten von F im Kreisgebiet $|s| < R_0$ liegen. Die Laurentreihe von $F(s)$ auf dem Bereich $|s| \geq R_0$ muß dann wegen (4.47) die Gestalt

$$F(s) = \frac{a_{-1}}{s} + \frac{a_{-2}}{s^2} + \frac{a_{-3}}{s^3} + \dots = \frac{1}{s} \left(a_{-1} + \frac{a_{-2}}{s} + \frac{a_{-3}}{s^2} + \dots \right)$$

besitzen. Mit $M := |a_{-1}| + \frac{|a_{-2}|}{R_0} + \frac{|a_{-3}|}{R_0^2} + \dots$ folgt daraus die Abschätzung:

$$|F(s)| \leq M/|s| \quad \text{für alle } s \text{ mit } |s| \geq R_0 \tag{4.48}$$

Im folgenden setzen wir voraus, daß $R \geq R_0$ ist. Für die Abschätzung des Integrals zerlegen wir K_R in drei Teile: $K_R := K_R^1 \oplus K_R^2 \oplus K_R^3$, wobei

- K_R^1 der Bogen mit Anfangspunkt $x + Tj$ und Endpunkt Rj ,
- K_R^2 der Bogen mit Anfangspunkt Rj und Endpunkt $-Rj$, und
- K_R^3 der Bogen mit Anfangspunkt $-Rj$ und Endpunkt $x - Tj$ ist.

Wir bemerken, daß wir jedes $s \in K_R$ durch $s(\varphi) = Re^{j\varphi} = R(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ mit einem $\varphi \in [0, 2\pi]$ darstellen können. Wir schätzen als erstes $\int_{K_R^1} F(s)e^{st} ds$ ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_R^1} F(s)e^{st} ds \right| &= \left| \int_{\arccos(x/R)}^{\pi/2} F(Re^{j\varphi})e^{tR(\cos \varphi + j \sin \varphi)} Rj e^{j\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\arccos(x/R)}^{\pi/2} |F(Re^{j\varphi})| R e^{tR \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq M \int_{\arccos(x/R)}^{\pi/2} e^{tR \cos \varphi} d\varphi \quad (\text{wegen (4.48)}) \\ &\leq M e^{tR\pi/2} \int_{\arccos(x/R)}^{\pi/2} e^{-tR\varphi} d\varphi \quad \left(\text{da } \cos \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \varphi, \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \\ &= \frac{M}{tR} \left(e^{tR(\pi/2 - \arccos(x/R))} - 1 \right) \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck strebt gegen null für $R \rightarrow \infty$, denn mit der Regel von de l'Hospital zeigt man für den Exponenten:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} tR(\pi/2 - \arccos(x/R)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{t(\pi/2 - \arccos(rx))}{r} = xt$$

Für das Integral längs des Bogens K_R^3 erhält man analog:

$$\int_{K_R^3} F(s)e^{st} ds \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

Zu behandeln ist nun also nur noch das Integral längs des Bogens K_R^2 . Es folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_R^2} F(s)e^{st} ds \right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |F(Re^{j\varphi})| R e^{tR \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq M \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR \cos \varphi} d\varphi \leq 2M \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR \cos \varphi} d\varphi \\ &\leq 2Me^{tR} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-(2tR/\pi)\varphi} d\varphi \quad \left(\text{da } \cos \varphi \leq -\frac{2}{\pi}\varphi + 1, \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right) \\ &\leq \frac{M\pi}{tR} (1 - e^{-tR}) \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit ist Satz 4.20 bewiesen. \square

4.4 Z-Transformation

Während das Verhalten eines Systems bisher im wesentlichen mit Hilfe stetiger oder stückweise stetiger Funktionen beschrieben wurde, hat man in vielen Anwendungen der Meß-, Digital- und Regelungstechnik von einer zu analysierenden Funktion nur die Werte auf äquidistanten diskreten Stellen

$$t_n = n\Delta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

zur Verfügung; d.h. es liegen nur die Funktionswerte $f_n := f(t_n)$ vor. (Im folgenden denken wir uns Δ als Zeiteinheit gewählt, so daß $t_n := n$ ist.) Entsprechend zur Laplacetransformation gehen wir im folgenden davon aus, daß

$$f_n = 0 \quad (\text{für alle Indizes } n < 0)$$

ist. Die Laplacetransformation ist aber für eine Zahlenfolge nicht definiert. Praktisch kann die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als Folge von Impulsen, die jeweils zu den diskreten Zeitpunkten n mit der Stärke f_n auftreten, aufgefaßt werden. Es ist daher naheliegend, den Impuls f_n mit Hilfe des Einheitsimpulses $\delta(t - n)$ in der Form $f_n \delta(t - n)$ (vgl. Übungen) darzustellen. Die gesamte Impulsfolge besitzt dementsprechend folgende Darstellung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n) =: f^*(t) \quad (4.49)$$

Diese ist durch die Zahlenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eindeutig bestimmt. Wendet man auf (4.49) die Laplacetransformation an, so folgt:

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \mathcal{L}\{\delta(t - n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns}$$

Um die Verhältnisse zu vereinfachen, setzt man hierin $z := e^s$, so daß die rechts stehende Summe die Form einer Potenzreihe mit negativen Exponenten annimmt, nämlich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

4.4.1 Definition der Z-Transformation

Definition 4.8 Gegeben sei die Zahlenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ihr ordnen wir die komplexe Funktion $F(z)$ gemäß folgender Transformationsvorschrift zu:

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \circ \bullet \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} =: F(z) \quad (4.50)$$

Die der Folge (f_n) zugeordnete Funktion $F(z)$ heißt *Z-Transformierte* von (f_n) , falls das Konvergenzgebiet der Reihe nicht leer ist. (Sonst sagt man, daß (f_n) keine Z-Transformierte besitzt.) Die Transformation (4.50) wird auch durch das Symbol

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$$

zum Ausdruck gebracht. Man beachte, daß F auf dem Konvergenzgebiet der Reihe eine analytische Funktion ist.

Beachte: Die Reihe in (4.50) (Potenzreihe mit negativen Exponenten) ist auf einem Außenkreisgebiet, also einem Gebiet der Form $|z| > R$, konvergent, sogar absolut. Wenn also (f_n) eine Z-Transformierte $F(z)$ besitzt, dann ist der Konvergenzbereich ein Außenkreisgebiet.

Es geht nun um die Frage, eine (möglichst große) Klasse von Folgen anzugeben, die eine Z-Transformierte besitzen, und umgekehrt darum, alle komplexen Funktionen zu kennzeichnen, die Bildfunktion einer geeigneten Zahlenfolge unter der Z-Transformation sind.

Satz 4.21 a) (f_n) sei eine Zahlenfolge, welche folgender Bedingung genüge:
Es gibt positive, konstante Zahlen M und c , so daß gilt:

$$|f_n| \leq M e^{cn} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Dann besitzt die Folge eine Z-Transformierte F .

b) Umgekehrt sei F eine komplexe Funktion, die nachstehende Anforderungen erfülle:

- 1) es gebe eine positive Zahl R so, daß F auf dem Außengebiet $|z| > R$ analytisch (oder holomorph) sei;
- 2) $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existiere (im eigentlichen Sinne).

Dann ist F Bildfunktion einer geeigneten Folge (f_n) . Diese läßt sich wie folgt aus $F(z)$ zurückgewinnen: Setze $H(z) := F(1/z)$ und berechne dann

$$f_n = \frac{1}{n!} [H^{(n)}(z)] \Big|_{z=0} \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.51)$$

BEWEIS: a) Wir betrachten die Zahlenfolge $g_n := M e^{cn}$. Wegen

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} e^c = e^c$$

konvergiert die folgende Reihe absolut: $\sum_{n=0}^{\infty} (Me^{cn})z^{-n}$ und zwar für alle z mit $|z| > R := e^c$ (vgl. Abschnitt 3.6.1). Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n||z|^{-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} Me^{cn}|z|^{-n}$$

trifft dies nun auch auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ zu.

b) Aufgrund der Voraussetzungen ist die durch

$$H(z) := F(1/z)$$

definierte Funktion H für alle z mit $|z| < 1/R$ analytisch. Daher ist folgende Taylorentwicklung von H in $z_0 = 0$ möglich:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad \text{mit} \quad f_n := \frac{H^{(n)}(0)}{n!}$$

Ersetzt man hierin z durch $\frac{1}{z}$, so folgt:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(0)}{n!} z^{-n}$$

Die Rückgewinnungsformel ist aus der letzten Gleichung ablesbar. □

4.4.2 Elementare Transformationspaare

Exemplarisch soll die Z-Transformation für einige elementare Zahlenfolgen durchgeführt werden. Die Rückgewinnungsformel aus Satz 4.21 b) wird dann in nächsten Abschnitt an Hand eines Beispiels erläutert.

Beispiel 4.24 :

- 1) Gegeben ist die konstante Folge $(f_n) := (1)$, oder ausführlich $(1, 1, 1, 1, \dots)$. Die Transformierte erhält man aus folgender Summe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

Dabei wurde die Summenformel für die geometrische Reihe benutzt mit $q := 1/z$. Das Konvergenzgebiet ist durch $|z| > 1$ gegeben. Es gilt also:

$$(1) \circ \text{---} \bullet \frac{z}{z - 1} =: F(z)$$

- 2) Wir betrachten die Folge $(f_n) := (n)$, oder ausführlich: $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$. Bei Durchführung der Transformation ist folgende Summe zu bilden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n}$$

Es ist häufig schwierig, für eine Summe dieses Typs einen geschlossenen Ausdruck zu finden. Wir führen die Substitution $Z := 1/z$ durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n Z^n = Z \sum_{n=0}^{\infty} n Z^{n-1} = Z \cdot \frac{d}{dZ} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Z^n \right) = Z \frac{d}{dZ} \left(\frac{1}{1-Z} \right) = \frac{Z}{(1-Z)^2}$$

wobei die Summenformel für die geometrische Reihe benutzt worden ist. Beachte, daß diese Formel nur für Z mit $|Z| < 1$ gültig ist. Rücknahme der Substitution ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} =: F(z)$$

wobei die Reihe für z mit $|z| > 1$ konvergent ist. Insgesamt gilt damit:

$$(n) \circ \bullet \frac{z}{(z-1)^2} =: F(z)$$

- 3) Betrachtet werde - für eine Konstante $a \neq 0$ - die Folge $(f_n) := (a^n)$, oder ausführlich: $(1, a, a^2, a^3, a^4, \dots)$. Die Z -Transformierte für diese Folge erhält man aus:

$$(a^n) \circ \bullet \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Auch hier wurde die Summationsformel für die geometrische Reihe mit $Z := \frac{a}{z}$ benutzt. Sie gilt für $|Z| = \left| \frac{a}{z} \right| < 1$, d.h. für $|z| > a$. Damit haben wir das Transformationspaar:

$$(a^n) \circ \bullet \frac{z}{z-a} =: F(z)$$

Beachte: In diesen Beispielen ist die Reihe, die jeweils die Funktion $F(z)$ festlegt, nur für das Außenkreisgebiet $|z| > 1$ bzw. $|z| > a$ konvergent (sogar absolut). Der Definitionsbereich der entstehenden Funktion $F(z)$ ist aber jeweils größer, nämlich in den ersten beiden Fällen $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, im dritten Fall $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Es ist nun üblich, den zuletzt genannten Bereich als Definitionsbereich der Z -Transformierten anzusehen (und nicht den Konvergenzbereich der Reihe). Es

handelt sich hier um die analytische Fortsetzung einer Funktion von einem Außenkreisgebiet auf ein umfassenderes Gebiet, die nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen nur auf eindeutige Weise vorgenommen werden kann.

Der folgende Satz stellt nun einige grundlegende Transformationspaare zusammen, die im Laufe der Vorlesung oder im Rahmen der Übungen begründet werden.

Satz 4.22 Für die Z-Transformation gelten folgende Korrespondenzen. Dabei sind $a \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ vorgegebene feste Größen.

	(f_n)	$F(z)$		f_n	$F(z)$
1.	(1)	$\frac{z}{z-1}$	5.	(a^n)	$\frac{z}{z-a}$
2.	$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	6.	(na^{n-1})	$\frac{z}{(z-a)^2}$
3.	(n)	$\frac{z}{(z-1)^2}$	7.	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
4.	(n^2)	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	8.	$\left(\frac{a^n}{n!}\right)$	$e^{a/z}$

4.4.3 Formeln zur Rücktransformation

Häufig verwendet man die Z-Transformation zur Lösung von linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten. (Dabei entspricht die Vorgehensweise genau der Lösung von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten durch die L-Transformation.) Man transformiert das Differenzgleichungssystem mittels Z-Transformation in den Bildbereich, hat dort ein System von linearen Gleichungen zu lösen, und transformiert das Ergebnis zurück in den Zeitbereich. Zur Rücktransformation braucht man - ähnlich wie bei der L-Transformation - praktikable Methoden.

Damit die komplexe Funktion F auch eine Bildfunktion unter der Z-Transformation ist, legen wir folgende **Voraussetzungen** zugrunde (vgl. Satz 4.21):

- 1) es gebe eine positive Zahl R so, daß F auf dem Außengebiet $|z| > R$ analytisch (oder holomorph) sei;

2) $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existiere (im eigentlichen Sinne).

Beachte: Eine rationale Funktion mit Zählergrad \leq Nennergrad erfüllt stets die obigen Voraussetzungen 1) und 2).

Nach dem zitierten Satz kann man dann die zugehörige Urbildfolge (f_n) aus F wie folgt zurückgewinnen:

Setze: $H(z) := F(1/z)$ und bestimme $f_n = \frac{1}{n!} [H^{(n)}(z)] \Big|_{z=0}$ (für $n = 0, 1, 2, \dots$)

Beispiel 4.25 :

Gegeben sei die Funktion $F : G := \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$, $F(z) := e^{a/z}$.

Berechne die Taylorkoeffizienten der Funktion $H(z) = F(1/z) = e^{az}$ an der Stelle $z_0 = 0$. Wegen $H^{(n)}(z) = a^n e^{az}$ folgt: $H^{(n)}(0) = a^n$. Damit erhält man:

$$f_n = \frac{H^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a^n}{n!} \quad \text{folglich: } e^{a/z} \bullet \text{---} \circ \left(\frac{a^n}{n!} \right)$$

Theoretisch ist obige Vorgehensweise immer möglich, es kann jedoch schwierig sein, die n -te Ableitung der Funktion H formelmäßig zu bestimmen. Deshalb ist es günstig, daß mit Hilfe des Residuenkalküls eine weitere Methode zur Rücktransformation zur Verfügung gestellt werden kann.

Satz 4.23 Die Funktion F erfülle die angegebenen Voraussetzungen 1) und 2). Ferner besitze F auf der Kreisscheibe $|z| \leq R$ die endlich vielen isolierten singulären Stellen z_1, \dots, z_m und sei im übrigen analytisch. Dann läßt sich die zu F gehörige Folge (f_n) nach folgender Formel berechnen:

$$\begin{aligned} a) \quad f_0 &= \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad \text{oder äquivalent: } f_0 = H(0) \\ b) \quad f_n &= \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left((F(z) \cdot z^{n-1}), z_k \right) \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Erläuterung zu b): Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist das Residuum von $F(z) \cdot z^{n-1}$ an jeder isolierten singulären Stelle z_k zu bilden. Das Folgenglied f_n erhält man dann, indem man (bei festem n) diese m Residuen aufsummiert.

Beispiel 4.26 :

Betrachte die Funktion $F : G := \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mapsto \mathbb{C}$, $F(z) := \frac{z}{z+1}$.

Wir erhalten:

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/z} = 1$$

Für jedes $n \geq 1$ sind die Residuen der Funktion $F(z) \cdot z^{n-1}$ an der Singularität $z_0 = -1$ zu bilden (Polstelle 1. Ordnung). Man erhält:

$$\operatorname{res}(F(z) \cdot z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)F(z)z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow -1} z^n = (-1)^n$$

Damit ist die Folge durch $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben. Es gilt also:

$$(-1)^n \circ \text{---} \bullet \frac{z}{z+1}$$

BEWEIS: Nach dem Satz von Laurent (Satz 3.20) kann man $F(z)$ für alle z mit $|z| > R$ mit Hilfe einer Laurentreihe (um 0) wie folgt darstellen:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} z^{-n} \quad (4.52)$$

Da $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existiert (im eigentlichen Sinne) nach Voraussetzung 1), folgt, daß $A_n = 0$ gelten muß für alle $n \geq 1$. Also ergibt sich für $F(z)$ aus (4.52) die folgende Darstellung:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{-n} z^{-n} \quad (4.53)$$

wobei nun offensichtlich $A_{-n} = f_n$ ist. Für $z \rightarrow \infty$ folgt daraus:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = A_0 = f_0$$

Für die verbleibenden Koeffizienten liefert Satz 3.21 folgende Integraldarstellung:

$$f_n = A_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(s)}{s^{-n+1}} ds$$

Dabei ist C eine einfach geschlossene Kurve, die den Kreis $|z| \leq R$ umschließt. Der Integrand in diesem Integral ist die Funktion $F(z) \cdot z^{n-1}$. Der Residuensatz (Satz 3.22) besagt nun, daß der Wert dieses Kurvenintegrals das $2\pi j$ -fache der Summe der Residuen an den Singularitäten des Integranden ist, die im Inneren von C liegen. Daraus folgt die Behauptung. \square

4.4.4 Abbildungsgesetze

Wie im Fall der F- und der L-Transformation gibt es auch für die Z-Transformation Regeln, die zum Ausdruck bringen, wie sich bestimmte Operationen, die im Originalraum ausgeführt werden, im Bildraum widerspiegeln.

Wie die beiden genannten Transformationen genügt auch die Z-Transformation dem **Linearitätsgesetz**:

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ferner gelte:

$$(f_n) \circ \bullet F(z), \quad (g_n) \circ \bullet G(z)$$

Dann folgt:

$$\alpha(f_n) + \beta(g_n) \circ \bullet \alpha F(z) + \beta G(z)$$

Der einfache Beweis sei dem Leser überlassen.

Verschiebungen im Originalraum

Die Verschiebung einer Folge nach rechts wird ähnlich festgelegt wie die einer Funktion $f(t)$.

Definition 4.9 Gegeben sei die Zahlenfolge (f_n) und eine feste natürliche Zahl k . Dann wird die um k Zeittakte nach rechts verschobene Folge (f_n^k) wie folgt definiert:

$$f_n^k = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq n \leq k-1 \\ f_{n-k}, & \text{für } n \geq k \end{cases}$$

Beispiel 4.27 :

- 1) Sei $(f_n) = (1)$ und sei $k = 4$. Dann ist die um 4 Zeittakte verschobene Folge (f_n^4) gegeben durch

$$f_n^4 = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq n \leq 3 \\ 1, & \text{für } n \geq 4 \end{cases}$$

Ausführlich lautet diese Folge: $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$

- 2) Sei $(g_n) = (0.8^n)$ und sei $k = 3$. Dann ist die um 3 Zeittakte verschobene Folge (g_n^3) gegeben durch

$$g_n^3 = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq n \leq 2 \\ 0.8^{n-3}, & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

oder ausführlich: $(0, 0, 0, 1, 0.8, 0.64, \dots)$.

Satz 4.24 Es gelte $(f_n) \circ \bullet F(z)$ und es sei (f_n^k) die um k Zeittakte nach rechts verschobene Folge. Dann gilt:

$$(f_n^k) \circ \bullet \frac{F(z)}{z^k} =: F_k(z)$$

d.h. die Bildfunktion von (f_n^k) geht aus der von (f_n) durch Multiplikation mit z^{-k} hervor.

BEWEIS: Nach Voraussetzung gilt:

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_k z^{-k} + f_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots$$

Für die Bildfunktion $F_k(z)$ von (f_n^k) gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} F_k(z) &= f_0^k + f_1^k z^{-1} + \dots + f_k^k z^{-k} + f_{k+1}^k z^{-(k+1)} + \dots \\ &= f_0 z^{-k} + f_1 z^{-(k+1)} + \dots \\ &= z^{-k} (f_0 + f_1 z^{-1} + \dots) = z^{-k} F(z) \end{aligned}$$

Zu beachten ist dabei die Beziehung, in der (f_n) und (f_n^k) stehen. □

Beispiel 4.28 :

Nach Satz 4.22 ist folgende Korrespondenz bekannt:

$$(f_n) = (1) \circ \bullet \frac{z}{z-1}$$

Dann sind (f_n^4) und (f_n^1) (d.h. $k = 4$ bzw. $k = 1$) nach obigem Satz wie folgt gegeben:

$$(f_n^4) \circ \bullet \frac{1}{z^3(z-1)} \quad \text{und} \quad (f_n^1) \circ \bullet \frac{1}{(z-1)}$$

Definition 4.10 Gegeben sei die Zahlenfolge (f_n) und eine feste natürliche Zahl k . Dann wird die um k Zeittakte nach links verschobene Folge $({}^k f_n)$ wie folgt definiert:

$${}^k f_n := f_{n+k} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Man schreibt an Stelle von $({}^k f_n)$ meist: $(f_{n+k})_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder kürzer: (f_{n+k}) .

Beispiel 4.29 :

Sei $(f_n) = (0.8^n)$, oder ausführlich: $(1, 0.8, 0.8^2, 0.8^3, \dots)$. Dann ist die um $k = 2$ Zeittakte nach links verschobene Folge durch (0.8^{n+2}) , oder ausführlich durch $(0.8^2, 0.8^3, \dots)$ gegeben.

Satz 4.25 Es gelte $(f_n) \circ \bullet F(z)$ und es sei (f_{n+k}) die um k Zeittakte nach links verschobene Folge. Dann gilt:

$$(f_{n+k}) \circ \bullet z^k \left(F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right) =: {}^k F(z)$$

Speziell lautet die Formel für $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} k = 1: & (f_{n+1}) \circ \bullet z (F(z) - f_0) \\ k = 2: & (f_{n+2}) \circ \bullet z^2 (F(z) - f_0 - f_1 z^{-1}) \\ k = 3: & (f_{n+3}) \circ \bullet z^3 (F(z) - f_0 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2}) \end{aligned}$$

BEWEIS: Nach Definition 4.10 gilt:

$$\begin{aligned} {}^k F(z) &= f_k + f_{k+1} z^{-1} + f_{k+2} z^{-2} + \dots \\ &= z^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right) \\ &= z^k \left(F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right) \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.30 :

Gegeben sei $(f_n) = (0.8^n)$ mit $F(z) = \frac{z}{z-0.8}$. Für die um $k = 2$ Zeittakte nach links verschobene Folge gilt nach obigem Satz:

$$(f_{n+2}) = (0.8^{n+2}) \circ \bullet z^2 \cdot \left(\frac{z}{z-0.8} - f_0 - f_1 z^{-1} \right) = \frac{0.64z}{z-0.8}$$

wobei $f_0 = 1$ und $f_1 = 0.8$ berücksichtigt wurde.

Anwendung auf Differenzgleichungen

Ähnlich wie man die L-Transformation zur Lösung von Anfangswertproblemen mit Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten einsetzen kann, so kann man die Z-Transformation zur Lösung von Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten verwenden.

Definition 4.11 Gegeben seien eine Folge (f_n) , eine natürliche Zahl m und konstante Zahlen a_1, \dots, a_m aus \mathbb{R} . Dann heißt eine Gleichung der Form

$$x_{n+m} + a_1 x_{n+m-1} + \dots + a_m x_n = f_n \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (4.54)$$

in der die Folge (x_n) gesucht ist, eine Differenzgleichung m -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sind Zahlen b_0, \dots, b_{m-1} aus \mathbb{R} vorgegeben, so nennt man die Bedingungen

$$x_0 = b_0, x_1 = b_1, \dots, x_{m-1} = b_{m-1}$$

Anfangsbedingungen zur Differenzgleichung (4.54).

Eine Differenzgleichung 2. Ordnung des Typs (4.54) lautet also:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = f_n \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Die zugehörigen ABn besitzen die Form: $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$. Gesucht ist eine Folge (x_n) , die die Differenzgleichung zu den gegebenen ABn erfüllt.

Beispiel 4.31 :

Gegeben sei die folgende Differenzgleichung 2. Ordnung

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = f_n \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

zu den ABn $x_0 = 0$, $x_1 = 0$. Es sei (f_n) die Folge $(0, 1, 1, 1, \dots)$. Diese Folge stimmt mit der Folge (f_n^1) aus Beispiel 4.28 überein. Damit gilt: $(f_n) \circ \bullet \frac{1}{z-1}$.

Die Transformation der linken Seite kann dann mit Hilfe von Satz 4.25 vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} (x_n) &\circ \bullet X(z) \\ (x_{n+1}) &\circ \bullet z(X(z) - x_0) = zX(z) \\ (x_{n+2}) &\circ \bullet z^2(X(z) - x_0 - x_1 z^{-1}) = z^2 X(z) \end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Differenzgleichung im Bildraum nun so:

$$(z^2 - 3z + 2) X(z) = \frac{1}{z-1}$$

Auflösen nach $X(z)$ ergibt:

$$X(z) = \frac{1}{(z^2 - 3z + 2)(z-1)} = \frac{1}{(z-2)(z-1)^2}$$

Nun ist die Funktion $X(z)$ in den Zeitbereich zurückzutransformieren, was mit dem Residuenkalkül geschieht. Da $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ bekannt sind, genügt es, die Folgenglieder für $n \geq 2$ zu bestimmen. Beachte, daß $X(z)$ in $z_1 = 1$ eine Polstelle 2. Ordnung und in $z_2 = 2$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt:

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname{res}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-1)^2(z-2)}, z_1\right) + \operatorname{res}\left(\frac{z^{n-1}}{(z-1)^2(z-2)}, z_2\right) \\ &= 2^{n-1} - n \quad (\text{für } n \geq 1) \end{aligned}$$

Also wird obige Differenzgleichung mit den gegebenen ABn von der Folge (x_n) mit

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0 \\ 2^{n-1} - n, & \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

gelöst.

BEWEIS: Es ist der Produktsatz für Reihen (das sog. Cauchy-Produkt) zu verwenden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 F(z) G(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k z^{-k} g_{n-k} z^{-(n-k)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \right) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n * g_n) z^{-n}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 4.32 :

Betrachte für $a \neq 1$, $a \neq 0$ die Folge $(f_n) := (a^n)$ sowie die Folge $(g_n) = (1)$. Bekannt sind nach Satz 4.22 folgende Beziehungen:

$$(a^n) \circ \bullet \frac{z}{z-a} \quad (1) \circ \bullet \frac{z}{z-1}$$

Nach dem Faltungssatz gilt folgende Korrespondenz:

$$H(z) := F(z)G(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)} \bullet \circ (a^n) * (1) =: h_n$$

Das Faltungsprodukt h_n erhält man nun auf folgende Weise:

$$h_n = \sum_{k=0}^n a^k \cdot 1 = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Damit ist gezeigt:

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-1)} \bullet \circ \left(\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \right)$$

4.5 Zusammenfassung

Fourierreihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt T -periodisch auf \mathbb{R} , wenn es eine Zahl $T > 0$ gibt, so daß gilt:

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Ein wichtiges Beispiel einer T -periodischen Funktion ist ein sog. TRIGONOMETRISCHES POLYNOM VOM GRAD n :

$$p_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

mit $\omega = 2\pi/T$, wobei $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ aus \mathbb{R} vorgegeben sind.

Ein solches Polynom kann man auch in der folgenden Form (mit den angegebenen Umrechnungsformeln) schreiben:

$$p_n(t) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t}$$

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_k := \frac{1}{2}(a_k - b_k j), \quad c_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + b_k j)$$

Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ T -periodisch und stückweise stetig. Dann stellt

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

mit $\omega = 2\pi/T$ eine BESTE ANNÄHERUNG an f dar, wenn die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ wie folgt festgelegt werden:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (\text{für } k \geq 1) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (\text{für } k \geq 1) \end{aligned}$$

Im Fall der komplexen Darstellung des trigonometrischen Polynoms sind die Koeffizienten nach folgender Formel zu berechnen:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

Berechnet man die Koeffizienten $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ in der oben beschriebenen Weise, so werden sie **Fourierkoeffizienten** der Funktion f genannt. Die unendliche Reihe mit diesen Koeffizienten, also:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißt dann **FOURIERREIHE VON f** .

DARSTELLUNG EINER T -PERIODISCHEN FUNKTION DURCH IHRE FOURIER-REIHE:
 Die Funktion f sei T -periodisch und auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für die Fourierreihe von f folgende Darstellung in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ ist. Natürlich gilt die Darstellung entsprechend auch für die Exponentialform der Fourierreihe.

Bildet man das trigonometrische Polynom $p_n(t)$ mit den Fourierkoeffizienten von f dann gilt:

$$\|f - p_n\| \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty$$

Ist f eine **GERADE FUNKTION**, so gilt: $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Ist f eine **UNGERADE FUNKTION**, so gilt: $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Fouriertransformation

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **FOURIER-TRANSFORMIERBAR**, wenn das uneigentliche Integral

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ existiert. Dann wird F **Fouriertransformierte** von f genannt. Man nennt das Paar (f, F) eine F -Korrespondenz und schreibt dafür auch:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \text{oder:} \quad f(t) \circ\text{---}\bullet F(\omega)$$

HINREICHENDE BEDINGUNG: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist Fouriertransformierbar, wenn f auf \mathbb{R} absolut integrierbar ist.

UMKEHRFORMEL ZUR F -TRANSFORMATION

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei absolut integrierbar und auf \mathbb{R} stückweise stetig differenzierbar. Dann läßt sich $f(t)$ in jedem Stetigkeitspunkt $t \in \mathbb{R}$ von f mit Hilfe der Formel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

darstellen. An jeder Sprungstelle lautet die Darstellung:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

REGELN FÜR DIE FOURIERTRANSFORMATION:

Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-j t_0 \omega} F(\omega)$
Frequenzverschiebung	$e^{j \omega_0 t} f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(\omega - \omega_0)$
Konjugation	$\overline{f(t)}$	$\circ \text{---} \bullet$	$\overline{F(-\omega)}$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

DIFFERENTIATIONSSATZ: f sei stetig und stückweise stetig differenzierbar. Sind f und f' absolut integrierbar, so folgt aus $f(t) \circ \text{---} \bullet F(\omega)$ die F -Korrespondenz:

$$f'(t) \circ \text{---} \bullet j\omega F(\omega)$$

DIFFERENTIATION IM BIBLBEREICH: Ist die Funktion $f_1(t) := t f(t)$ F -transformierbar, so folgt aus $f(t) \circ \text{---} \bullet F(\omega)$:

$$t f(t) \circ \text{---} \bullet j F'(\omega)$$

FALTUNGSSATZ: Die Funktionen f und g seien absolut integrierbar. Aus $f \circ \text{---} \bullet F$ und $g \circ \text{---} \bullet G$ folgt:

$$F(\omega) \cdot G(\omega) \bullet \text{---} \circ (f * g)(t)$$

TRANSFORMATION GERADER UND UNGERADER FUNKTIONEN: Die Bildfunktion F einer geraden (bzw. ungeraden) F -transformierbaren Funktion f ist ebenfalls gerade (bzw. ungerade). Die Transformationsformel vereinfacht sich dann zu:

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad \text{falls } f \text{ gerade ist}$$

$$F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt, \quad \text{falls } f \text{ ungerade ist}$$

Auch die Umkehrformeln erlauben eine vereinfachte Darstellung.

Laplace-Transformation

Im gesamten Abschnitt gilt für jede Zeitfunktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ die VORAUSSETZUNG: $f(t) = 0$ für alle $t < 0$. Außerdem sollen diese Funktionen (zumindest) **stückweise stetig** sein.

Das folgende uneigentliche Integral mit dem Parameter $s := x + j\omega \in \mathbb{C}$ heißt Laplace-Integral: $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$. Wenn es überhaupt für ein $s \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, so gibt es eine Zahl $\alpha_f \in \mathbb{R}$, so dass es zumindest für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ konvergiert, auf der sog. Konvergenzhalbene. f wird in diesem Fall L -transformierbar genannt.

HINREICHENDE BEDINGUNG: Gibt es konstante Zahlen k, M , so dass für alle $t \geq 0$ gilt: $|f(t)| \leq M e^{kt}$, dann ist f L -transformierbar.

Ist f L -transformierbar, dann wird durch das Laplaceintegral eine ANALYTISCHE FUNKTION F auf der Halbebene $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ definiert:

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Durch das Laplaceintegral entsteht eine Funktionsvorschrift für $F(s)$, die im allgemeinen über die Konvergenzhalbene $\operatorname{Re} s > \alpha_f$ hinaus Gültigkeit besitzt. Diesen Bereich sehen wir dann als Definitionsbereich G von F an (*natürliches Definitionsgebiet von F*).

$F(s)$ heißt dann Laplace-Transformiert von $f(t)$, wir schreiben:

$$f(t) \circ \text{---} \bullet F(s) \quad \text{oder} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

WICHTIGE ABBILDUNGSGESETZE DER L-TRANSFORMATION:

DIFFERENTIATIONSSATZ:

f sei für $t > 0$ wenigstens $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar und $f^{(n)}$ sei auf $(0, \infty)$ wenigstens noch stückweise stetig. Dann gilt:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Speziell haben wir also für $n = 1$ bis 3:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0+) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 F(s) - s f(0+) - f'(0+) \\ \mathcal{L}\{f'''(t)\} &= s^3 F(s) - s^2 f(0+) - s f'(0+) - f''(0+) \end{aligned}$$

INTEGRATIONSSATZ: Aus $f(t) \circ \text{---} \bullet F(s)$ folgt: $h(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau \circ \text{---} \bullet \frac{F(s)}{s}$

FALTUNGSSATZ: Aus $f \circ \text{---} \bullet F$ und $g \circ \text{---} \bullet G$ folgt:

$$F(s) \cdot G(s) \bullet \text{---} \circ (f * g)(t)$$

WEITERE REGELN:

a sei eine positive reelle Zahlen, b darf beliebig komplex sein.

Zeitverschiebung	$f(t - a)$	$\circ \text{---} \bullet$	$e^{-as} F(s)$
Verschiebung im s -Bereich	$e^{bt} f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$F(s - b)$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\circ \text{---} \bullet$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Differentiation im s -Bereich	$(-t)^n f(t)$	$\circ \text{---} \bullet$	$F^{(n)}(s)$

METHODEN DER RÜCKTRANSFORMATION:

PARTIALBRUCHZERLEGUNG: Eine rationale Funktion $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ mit Grad $P <$ Grad Q kann in Partialbrüche zerlegt werden. Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $Q(s)$ mit den Vielfachheiten m_1, \dots, m_k , so gibt es zu jedem a_i Koeffizienten $A_{i1}, \dots, A_{im_i} \in \mathbb{C}$, so daß eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{A_{i1}}{s - a_i} + \frac{A_{i2}}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{im_i}}{(s - a_i)^{m_i}} \right)$$

gilt. Die einzelnen Summande kann man mit der Transformationsformel zurücktransformieren: $\frac{1}{(s-a)^n} \bullet \text{---} \circ \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$

RESIDUENKALKÜL: $F(s)$ sei mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten s_1, \dots, s_m auf \mathbb{C} analytisch und genüge der Bedingung $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. Dann gilt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \text{res}(F(s)e^{st}, s_k), \text{ für } t > 0$$

Merke: Jede **rationale** Funktion $F(s) := p(s)/q(s)$ mit $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ erfüllt die Voraussetzungen dieses Satzes.

Z-Transformation

Gegeben sei eine Zahlenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, f_2, \dots)$. Wir bilden mit ihrer Hilfe die folgende Potenzreihe mit negativen Exponenten:

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Wenn diese Reihe für ein $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, dann ist die Reihe auf einen Außenkreisgebiet $\{z \mid |z| > R\}$ konvergent. In diesem Fall sagen wir, die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ besitzt die Z-Transformierte $F(z)$. Wir drücken die entstehende Zuordnung wie folgt aus:

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z) \quad \text{oder} \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \circ \text{---} \bullet F(z)$$

HINREICHENDE BEDINGUNG: (f_n) sei eine Zahlenfolge, welche folgender Bedingung genüge: Es gibt positive, konstante Zahlen M und c , so daß gilt:
 $|f_n| \leq M e^{cn} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$ Dann besitzt die Folge eine Z-Transformierte F .

RÜCKTRANSFORMATION MIT DEM RESIDUENKALKÜL: Die Funktion F erfülle folgende Voraussetzungen: 1) Sie besitze in \mathbb{C} nur endlich viele isolierte Singularitäten z_1, \dots, z_m , 2) es gelte $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existiere. Dann läßt sich die zu F gehörige Folge (f_n) nach folgender Formel berechnen:

- a) $f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
- b) $f_n = \sum_{k=1}^m \text{res}((F(z) \cdot z^{n-1}), z_k) \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, \dots)$

DEFINITION EINER NACH LINKS VERSCHOBENEN FOLGE: Seien die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sowie die Zahl $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann wird die Folge

$$(f_{n+k})_{n \in \mathbb{N}_0} = (f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots)$$

die um k Zeittakte nach links verschobene Folge genannt.

TRANSFORMATIONSSATZ FÜR DIE VERSCHOBENE FOLGE:
Aus der Korrespondenz $(f_n) \circ \text{---} \bullet F(z)$ folgt:

$$(f_{n+k}) \circ \text{---} \bullet z^k \left(F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right)$$

Speziell: $k = 1 : (f_{n+1}) \circ \text{---} \bullet z (F(z) - f_0)$

$k = 2 : (f_{n+2}) \circ \text{---} \bullet z^2 (F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$

Kapitel 5

Spezielle lineare Differentialgleichungen*

In der theoretischen Elektrotechnik werden Potenziale meist durch das Lösen spezieller partieller Differentialgleichungen ermittelt. Ist apriori bekannt, dass das Potenzial gewisse Symmetrieeigenschaften besitzt, so wird häufig versucht, eine Lösung der partiellen DGL mit Hilfe eines sog. Separationsansatzes herbeizuführen. Mit einem solchen wird dann erreicht, dass an Stelle einer partiellen DGL mehrere gewöhnliche DGLn zu lösen sind. Die wichtigsten DGLn, die dabei auftreten, sind neben der DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die uns aus Mathematik A bereits bekannt ist, die Eulersche DGL, die Besselsche DGL und die Legendresche DGL.

5.1 Theoretische Grundlagen über lineare DGLn

Wir beschränken uns im folgenden auf lineare DGLn zweiter Ordnung, die wie folgt definiert sind.

Definition 5.1 Gegeben seien vier auf einem Intervall $I := (a, b)$ mit $a < b$ stetige, reellwertige Funktionen P_0, P_1, P_2 und R . Eine Gleichung der Form

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x) \quad \text{mit } x \in (a, b) \quad (5.1)$$

heißt lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die DGL heißt homogen, wenn $R = 0$ auf (a, b) ist, andernfalls inhomogen. Eine Funktion $y = y(x)$ aus $C^2(a, b)$ heißt Lösung der DGL, wenn sie die Gleichung (5.1) für alle $x \in (a, b)$ erfüllt.

Wie uns bereits bekannt ist, wird häufig eine Lösung der DGL gesucht, die zusätzliche Bedingungen erfüllen soll. Vorgegeben sei ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ sowie Zahlen

β_0, β_1 . Dann werden Bedingungen der Form

$$y(x_0) = \beta_0, \quad y'(x_0) = \beta_1 \quad (5.2)$$

Anfangsbedingungen zur DGL (5.1) genannt. Die DGL zusammen mit den Anfangsbedingungen heißt *Anfangswertproblem*.

Wir setzen nun weiterhin voraus: $P_0(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Division der DGL (5.1) durch $P_0(x)$ führt dann zur linearen DGL 2. Ordnung in *Standardform*:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x) \quad \text{mit } x \in (a, b) \quad (5.3)$$

Ein **Spezialfall** dieses Typs von Differentialgleichung ist uns bereits bekannt, nämlich der, in dem die Koeffizientenfunktionen p_1 und p_2 in der Gleichung (5.3) konstante Zahlen a_1 und a_2 sind. Wir haben diese DGL lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten genannt. Wie eine solche DGL zu lösen ist, wurde ausführlich in Mathematik A besprochen.

Beispiel 5.1 :

1. Die DGL

$$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$$

ist eine lineare DGL 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten. Sie ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Wird eine Lösung nur auf dem Intervall $(0, \infty)$ gesucht, so kann durch x^2 dividiert werden und man erhält eine (homogene) Gleichung in Standardform:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$$

Diese DGL ist für $x \in (0, \infty)$ (oder für $x \in (-\infty, 0)$) definiert.

2. Die DGL

$$y'' + x^2 y' + (\sin x) y = e^x$$

ist eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten in Standardform. Sie ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert.

3. Die DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + x$$

ist eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für die ein Lösungsschema bekannt ist.

4. Die DGL

$$y'' + y y' + y^2 = 0$$

ist eine nicht-lineare DGL.

Satz 5.1 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für das AWP)

Gegeben sei eine lineare DGL (5.1) auf einem Intervall (a, b) mit Anfangsbedingungen der Form (5.2). Dann gibt es eine und nur eine Funktion aus $\mathcal{C}^2(a, b)$, die dieses AWP löst.

Ein Beweis dieses Satzes wird im Rahmen dieses Skripts nicht geführt.

Satz 5.2 (Struktur der Lösungsmenge der homogenen DGL)

Die homogene DGL (5.1) besitzt genau zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen, die den Lösungsraum aufspannen, d.h. sind y_1 und y_2 zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen der DGL (5.1), so ist die Lösungsgesamtheit durch

$$y(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

gegeben, wobei c_1 und c_2 zwei beliebig wählbare Konstanten aus \mathbb{R} sind. Zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen der homogenen DGL werden *Fundamentalsystem* oder *Basis des Lösungsraumes* genannt.

BEWEIS: Die Behauptung kann aus dem letzten Satz abgeleitet werden. Wir führen für die linke Seite der DGL (5.1) folgende Abkürzung ein:

$$L(y) := P_0(x) y'' + P_1(x) y' + P_2(x) y$$

Man bestätigt, dass die so definierte Abbildung L linear ist, d.h. für zwei Funktionen $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(a, b)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$. Sind nun y_1, y_2 zwei Lösungsfunktionen der homogenen DGL, dann gilt: $L(y_1) = 0 = L(y_2)$. Dann folgt aber nach obiger Beziehung: $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$, d.h. $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ist nun ebenfalls eine Lösungsfunktion der homogenen DGL. Also ist die Menge M aller Lösungsfunktionen der homogenen DGL ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^2(a, b)$.

Wir zeigen nun, dass M die Dimension zwei besitzt. Zu beliebig vorgegebenem Zahlenpaar $(\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$ gibt es nach Satz 5.1 genau eine Lösungsfunktion der homogenen DGL (5.1) mit $y(x_0) = \beta_0$, $y'(x_0) = \beta_1$. Dies bedeutet, dass die Abbildung T , definiert durch

$$T : M \mapsto \mathbb{R}^2, \quad T(y) := (\beta_0, \beta_1)$$

bijektiv ist. Dass T eine lineare Abbildung ist, zeigt eine einfache Rechnung. Damit müssen M und \mathbb{R}^2 dieselbe Dimension besitzen, d.h. M wird von zwei Elementen aufgespannt. \square

Beispiel 5.2 :

Für eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, also eine DGL der Form

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (5.4)$$

ist uns bereits eine Methode zur Ermittlung eines Fundamentalsystems bekannt. Man stellt zu (5.4) die charakteristische Gleichung auf:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

und ermittelt dann deren Nullstellen, die mit λ_1, λ_2 bezeichnet seien. Je nach Art dieser Nullstellen erhält man folgendes Fundamentalsystem:

- 1) Sind λ_1, λ_2 reell und verschieden, so ist ein Fundamentalsystem durch $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ gegeben.
- 2) Ist λ_1 eine zweifache reelle Nullstelle, so ist $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$ ein Fundamentalsystem.
- 3) Liegt eine Paar konjugiert komplexer Nullstellen vor: $\lambda_1 := \alpha + j\beta, \lambda_2 := \alpha - j\beta$, so ist $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ ein Fundamentalsystem.

Die Lösungsmenge der homogenen DGL wird dann jeweils von diesen beiden Lösungsfunktionen aufgespannt.

Beachte aber: Diese Methode zur Ermittlung eines Fundamentalsystems darf nur auf lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten angewendet werden. Für lineare DGLn mit variablen Koeffizienten versucht man häufig, ein Fundamentalsystem mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes zu finden (sh. unten).

Satz 5.3 (Struktur der Lösungsmenge der inhomogenen DGL)

Gegeben sei die inhomogene lineare DGL (5.1). Es sei ein Fundamentalsystem $y_1(x), y_2(x)$ der zugehörigen homogenen DGL bekannt, ebenso liege eine spezielle Lösungsfunktion $y_p(x)$ der inhomogenen DGL vor. Dann ist die Lösungsmenge der inhomogenen DGL gegeben durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten aus \mathbb{R} sind.

Die Begründung entspricht dem Beweis des entsprechenden Satzes für lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten (vgl. Mathematik B, Unterabschnitt 5.3.2).

Wir halten fest: Die grundlegenden theoretischen Sätze, die uns für lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten bekannt sind, gelten entsprechend auch für lineare DGLn mit variablen Koeffizienten. Die bekannten Lösungsmethoden lassen sich aber nicht auf DGLn mit variablen Koeffizienten ausdehnen.

5.2 Die Eulersche DGL

Die Eulersche DGL besitzt die Form

$$x^2 y'' + b_1 x y' + b_2 y = 0 \quad \text{mit } x \in (0, \infty) \quad (5.5)$$

wobei b_1 und b_2 vorgegebene konstante Zahlen sind.

Die DGL (5.5) läßt sich mit Hilfe der folgenden Variablensubstitution in eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten transformieren; wir setzen:

$$\begin{aligned} x &:= e^t \quad \text{und: } u(t) := y(e^t) \\ \Leftrightarrow t &= \ln x \quad \text{somit: } y(x) = u(\ln x) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Im folgenden sind die Ableitungen nach x mit „Strich“ und die Ableitungen nach t mit „Punkt“ gekennzeichnet. Unter Beachtung der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{du}{dt} \frac{1}{x} = \dot{u} e^{-t} \\ y'' &= \frac{d}{dx} (y') = \frac{d}{dt} (\dot{u} e^{-t}) e^{-t} = [(\ddot{u} - \dot{u}) e^{-t}] e^{-t} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $y' = \dot{u} \frac{1}{x}$ und $y'' = (\ddot{u} - \dot{u}) \frac{1}{x^2}$ geht die DGL (5.5) über in die folgende DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{u} + (b_1 - 1) \dot{u} + b_2 u = 0$$

Damit haben wir folgende **Lösungsmethode** für die DGL (5.5) gewonnen:

- 1) Man stelle zu (5.5) die transformierte DGL auf (lineare DGL mit konstanten Koeffizienten): $\ddot{u} + (b_1 - 1) \dot{u} + b_2 u = 0$.
- 2) Ist $u(t)$ eine Lösungsfunktion dieser DGL, so ist $y(x) := u(\ln x)$ eine Lösungsfunktion von (5.5). Insbesondere erhält man auf diese Weise alle Lösungsfunktionen von (5.5).

Beispiel 5.3 :

- 1) Betrachtet wird die DGL $x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0$ für $x > 0$. Der Parameter n ist eine feste positive reelle Zahl. Es gilt: $b_1 = 1$ und $b_2 = -n^2$. Die transformierte DGL lautet somit:

$$\ddot{u} - n^2 u = 0$$

Die charakteristische Gleichung ist somit durch $\lambda^2 - n^2 = 0$ gegeben. Sie besitzt die reellen Nullstellen $\lambda_1 = n$ und $\lambda_2 = -n$. Die Lösungsmenge der transformierten DGL lautet somit:

$$u(t) = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}$$

Führen wir darin die Rücksubstitution $t = \ln x$ aus, so erhalten wir:

$$y(x) = u(\ln x) = c_1 x^n + c_2 x^{-n}$$

(Beachte: $e^{\pm nt} = e^{\pm n \ln x} = (e^{\ln x})^{\pm n} = x^{\pm n}$.)

- 2) Betrachtet wird die DGL $x^2 y'' + 2x y' - n(n+1)y = 0$ für $x > 0$. Dabei ist n eine feste positive reelle Zahl. Es gilt: $b_1 = 2$ und $b_2 = -n(n+1)$. Die transformierte DGL lautet somit:

$$\ddot{u} + \dot{u} - n(n+1)u = 0$$

Das charakteristische Polynom lautet: $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - n(n+1) = 0$ mit den reellen Nullstellen $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = -(n+1)$. Die Lösungsmenge der transformierten DGL lautet somit:

$$u(t) = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-(n+1)t}$$

Führen wir darin die Rücksubstitution $t = \ln x$ aus, so erhalten wir:

$$y(x) = u(\ln x) = c_1 x^n + c_2 x^{-(n+1)}$$

5.3 Die Legendresche DGL

Die Legendresche DGL besitzt die Form

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + n(n+1) y = 0 \quad (5.7)$$

wobei $n \geq 0$ ein reeller Parameter ist. Gesucht werden Lösungsfunktionen, die auf dem Intervall $(-1, 1)$ definiert sind. Nach Satz 5.2 gibt es zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, von denen die Lösungsmenge aufgespannt wird, d.h. die Lösungsmenge hat die Gestalt

$$y(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

mit beliebigen reellen Konstanten c_1, c_2 .

5.3.1 Ermittlung der Lösungsmenge

Unser Ziel besteht darin, ein Paar linear unabhängiger Lösungen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes zu finden. Wir gehen also von einem Ansatz der Form

$$y(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{\nu} \quad (5.8)$$

aus. Da dieser Ansatz in die DGL (5.7) eingesetzt werden soll, bilden wir die Ableitungen:

$$y'(x) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \alpha_{\nu} x^{\nu-1} \quad y''(x) := \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) \alpha_{\nu} x^{\nu-2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 2x y'(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu \alpha_{\nu} x^{\nu} \\ (1-x^2) y''(x) &= \sum_{\nu=2}^{\infty} [\nu(\nu-1) \alpha_{\nu} x^{\nu-2} - \nu(\nu-1) \alpha_{\nu} x^{\nu}] \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)(\nu+1) \alpha_{\nu+2} - \nu(\nu-1) \alpha_{\nu}] x^{\nu} \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL (5.7) führt schließlich zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)(\nu+1) \alpha_{\nu+2} - \nu(\nu-1) \alpha_{\nu} - 2\nu \alpha_{\nu} + n(n+1) \alpha_{\nu}] x^{\nu} = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{\nu=0}^{\infty} [(\nu+2)(\nu+1) \alpha_{\nu+2} + (n-\nu)(n+\nu+1) \alpha_{\nu}] x^{\nu} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Diese Gleichung soll für alle $x \in (-1, 1)$ erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn jeder Koeffizient zu x^{ν} , also der Ausdruck in der Klammer $[.]$ null ist. Somit folgt:

$$\begin{aligned} &(\nu+2)(\nu+1) \alpha_{\nu+2} + (n-\nu)(n+\nu+1) \alpha_{\nu} = 0 \\ \Leftrightarrow &\alpha_{\nu+2} = -\frac{(n-\nu)(n+\nu+1)}{(\nu+1)(\nu+2)} \alpha_{\nu} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Beziehung (5.10) gilt für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dies bedeutet: $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \dots$ kann man rekursiv aus α_0 berechnen, indem man $\nu = 0, 2, 4, \dots$ nacheinander in (5.10) einsetzt:

$$\alpha_2 = -\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \alpha_0$$

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4} \alpha_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha_0 \\ \alpha_6 &= -\frac{(n-4)(n+5)}{5 \cdot 6} \alpha_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} \alpha_0 \\ \alpha_8 &= \frac{(n-6)(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}{8!} \alpha_0\end{aligned}$$

Die Gesetzmäßigkeit dürfte jetzt erkennbar sein!

Ebenso kann man $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7, \dots$ rekursiv aus α_1 berechnen, indem man $\nu = 1, 3, 5, \dots$ nacheinander in (5.10) einsetzt:

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{2 \cdot 3} \alpha_1 \\ \alpha_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \cdot 5} \alpha_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \alpha_1 \\ \alpha_7 &= -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} \alpha_1\end{aligned}$$

Die Gesetzmäßigkeit dürfte nun ablesbar sein.

Wir denken uns nun die ermittelten Koeffizienten (α_ν) in den Potenzreihenansatz (5.8) eingesetzt. Terme mit geraden Exponenten werden mit α_0 , solche mit ungeraden Exponenten mit α_1 multipliziert. Die Teilreihe, die mit α_0 multipliziert wird, bezeichnen wir mit $y_1(x)$, jene, die mit α_1 multipliziert wird, mit $y_2(x)$, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 \\ &\quad - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} x^6 + \dots\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}y_2(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 \\ &\quad - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} x^7 + \dots\end{aligned}\quad (5.12)$$

Damit erhalten wir die folgende Aussage.

Satz 5.4 (Lösungsmenge der DGL (5.7))

Die Lösungsmenge der Legendreschen DGL zum Parameter $n \geq 0$ ist gegeben durch

$$y(x) = \alpha_0 y_1(x) + \alpha_1 y_2(x)$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ nach (5.11) bzw. (5.12) gegeben und α_0 und α_1 beliebige Konstanten aus \mathbb{R} sind.

Bemerkung: Die allgemeine Form der Koeffizienten in (5.11) zu x^{2k} bzw. in (5.12) zu x^{2k+1} lautet:

$$\alpha_{2k} = (-1)^k \frac{(n - (2k - 2)) \dots (n - 2) n (n + 1)(n + 3) \dots (n + (2k - 1))}{(2k)!}$$

$$\alpha_{2k+1} = (-1)^k \frac{(n - (2k - 1)) \dots (n - 3)(n - 1)(n + 2) \dots (n + 2k)}{(2k + 1)!}$$

Aus dieser Darstellung der Koeffizienten kann man erkennen, dass eine spezielle Situation in dem Fall eintritt, wenn der Parameter n aus \mathbb{N}_0 ist:

- 1) Ist n gerade, dann sind nur endlich viele Koeffizienten $\alpha_{2k} \neq 0$, d.h. dann ist $y_1(x)$ ein Polynom.
- 2) Ist n ungerade, dann sind nur endlich viele Koeffizienten $\alpha_{2k+1} \neq 0$, d.h. dann ist $y_2(x)$ ein Polynom.

Damit haben wir im Fall $n \in \mathbb{N}_0$:

- n gerade: $y_1(x)$ ist ein Polynom, $y_2(x)$ ist eine Reihe.
- n ungerade: $y_2(x)$ ist ein Polynom, $y_1(x)$ ist eine Reihe.

5.3.2 Legendre-Polynome*

Die oben angesprochenen Polynome werden so mit einem Skalar multipliziert, dass ihr Graph durch den Punkt $(1, 1)$ verläuft, d.h. man multipliziert $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ mit $\frac{1}{y_1(1)}$ bzw. $\frac{1}{y_2(1)}$.

Definition 5.2 Ist $y_i(x)$ ($i \in \{1, 2\}$) ein Polynom vom Grad m , so setzt man

$$P_m(x) := \frac{y_i(x)}{y_i(1)}$$

und nennt $P_m(x)$ Legendre-Polynom vom Grad m . Die Legendre-Polynome werden auch Legendre-Funktionen 1. Art genannt.

Man spricht von einer Legendre-Funktion 2. Art, wenn $y_i(x)$ eine Reihe ist.

Die Legendre-Polynome spielen in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine Rolle, sie werden in mathematischen Nachschlagwerken in Listen geführt und sind dort graphisch dargestellt. Im folgenden sind die ersten sechs Legendre-Polynome angegeben:

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{array}$$

Es sei erwähnt, dass die Legendre-Polynome im Raum $\mathcal{C}([-1, 1])$ bezüglich des üblichen Skalarprodukts ein **Orthogonalsystem** bilden. Es gilt:

$$\langle P_n, P_m \rangle := \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{für } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{für } n = m \end{cases}$$

In der Literatur findet man verschiedene Formeln, mit deren Hilfe man die Legendre-Polynome berechnen kann. Wir geben hier eine solche Formel an, die nach Rodrigues benannt ist:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m]$$

5.3.3 Ein Ansatz aus TE, der zu einer Eulerschen und einer Legendreschen DGL führt

Bei der Ermittlung des elektrostatischen Potentials ist häufig die Laplacesche DGL (eine partielle DGL) zu lösen:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2\Phi}{dx^2} + \frac{\partial^2\Phi}{dy^2} + \frac{\partial^2\Phi}{dz^2} = 0 \quad (5.13)$$

In Kugelkoordinaten lautet die Gleichung (5.13) (sh. Satz 2.6):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

Ist von vornherein bekannt, dass das Potential Φ zylindersymmetrisch ist, so hängt es nicht von φ ab, so dass $\frac{\partial\Phi}{d\varphi} = 0$ ist. In obiger Gleichung entfällt dann der letzte Summand. Multiplikation mit r^2 ergibt dann:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) = 0 \quad (5.14)$$

Für die Ermittlung von Lösungen wählen wir folgenden Produktansatz für das Potential:

$$\Phi(r, \vartheta) := U(r) \cdot V(\vartheta)$$

Einsetzen in (5.14) ergibt:

$$V \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + U \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dV}{d\vartheta} \right) = 0$$

Division durch UV und Umstellen ergibt:

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{1}{V} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dV}{d\vartheta} \right) \quad (5.15)$$

In dieser Gleichung stehen links und rechts Terme, die jeweils von verschiedenen Variablen (r bzw. ϑ) abhängen. Da die beiden Seiten aber ständig gleich sein müssen, können sie nur gleich einer gemeinsamen Konstanten K sein; wir setzen $K := n(n+1)$. Zunächst wird die linke Seite gleich K gesetzt:

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = n(n+1) \Leftrightarrow r^2 \frac{d^2U}{dr^2} + 2r \frac{dU}{dr} - n(n+1)U = 0 \quad (5.16)$$

Die Gleichung (5.16) ist eine Eulersche DGL, die wir im Beispiel 8.3, 2) gelöst haben.

Es wird nun die rechte Seite von (5.15) gleich K gesetzt:

$$-\frac{1}{V} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dV}{d\vartheta} \right) = K$$

Wir führen nun eine Variablentransformation durch: $x := \cos \vartheta$, $dx = -\sin \vartheta d\vartheta$, d.h. $d\vartheta = -\frac{dx}{\sin \vartheta}$. Dann folgt, wenn wir $y := V$ setzen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y} \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} \right] = K \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + Ky = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 - x^2) y'' - 2xy' + Ky = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung ist offensichtlich eine Legendresche DGL, die wir oben gelöst haben.

Das Problem, die (partielle) Laplacesche DGL zu lösen, wurde also mit Hilfe eines Separationsansatzes auf das Problem reduziert, ein Paar gewöhnlicher DGLn zu lösen.

5.4 Die Besselsche DGL

Die Besselsche DGL besitzt die Form

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0 \quad (5.17)$$

wobei $m \geq 0$ ein reeller Parameter ist. Wir suchen Lösungsfunktionen, die auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert sind.

5.4.1 Ermittlung von Lösungen

Unser Ziel besteht darin, eine Lösung der DGL (5.17) durch einen Potenzreihenansatz der Form

$$y(x) := x^m \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{\nu} \right) \quad (5.18)$$

zu finden. Der Ansatz $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{m+\nu}$ wird in die DGL (5.17) eingesetzt, die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (m + \nu) \alpha_{\nu} x^{m+\nu-1} = x^{m-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (m + \nu) \alpha_{\nu} x^{\nu} \right) \\ y''(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (m + \nu)(m + \nu - 1) \alpha_{\nu} x^{m+\nu-2} = x^{m-2} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (m + \nu)(m + \nu - 1) \alpha_{\nu} x^{\nu} \right) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL (5.17) ergibt:

$$\begin{aligned} &x^m \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} [(m + \nu)(m + \nu - 1) + (m + \nu) - m^2] \alpha_{\nu} x^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{\nu+2} \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow &x^m \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} [\nu(2m + \nu)] \alpha_{\nu} x^{\nu} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha_{\nu-2} x^{\nu} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Damit die Gleichung (5.19) für alle $x \in (0, \infty)$ erfüllt ist, muß jeder Koeffizient zur Potenz x^{ν} (für jedes $\nu = 0, 1, 2, \dots$) null sein:

$$\begin{aligned} \nu = 0 : & \quad 0(2m + 0) \alpha_0 = 0 & \Rightarrow & \quad \alpha_0 \text{ beliebig} \in \mathbb{R} \\ \nu = 1 : & \quad 1(2m + 1) \alpha_1 = 0 & \Rightarrow & \quad \alpha_1 = 0 \\ \nu \geq 2 : & \quad \nu(2m + \nu) \alpha_{\nu} + \alpha_{\nu-2} = 0 & \Rightarrow & \quad \alpha_{\nu} = -\frac{1}{\nu(2m + \nu)} \alpha_{\nu-2} \end{aligned}$$

Jeder Koeffizient α_{ν} läßt sich also mit Hilfe seines Vorgängers über die Formel

$$\alpha_{\nu} = -\frac{1}{\nu(2m + \nu)} \alpha_{\nu-2}$$

rekursiv berechnen. Da $\alpha_1 = 0$ ist, sind die Koeffizienten $\alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{2k+1}, \dots$ alle null. Für die geraden Indizes ν gilt:

$$\begin{aligned} \nu = 2 : & \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2(2m+2)} \alpha_0 = -\frac{1}{2^2(m+1)} \alpha_0 \\ \nu = 4 : & \quad \alpha_4 = -\frac{1}{4(2m+4)} \alpha_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 2! (m+1)(m+2)} \alpha_0 \\ \nu = 6 : & \quad \alpha_6 = -\frac{1}{6(2m+6)} \alpha_4 = -\frac{1}{2^6 \cdot 3! (m+1)(m+2)(m+3)} \alpha_0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Gesetzmäßigkeit dürfte daraus erkennbar sein:

$$\nu = 2k : \quad \alpha_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (m+1)(m+2) \cdots (m+k)} \alpha_0 \quad (5.20)$$

Wir setzen die gefundenen Koeffizienten in den Ansatz (5.18) ein und erhalten damit die Lösungsfunktion

$$y(x) = \alpha_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (m+1)(m+2)\cdots(m+k)} x^{2k+m} \right) \quad (5.21)$$

wobei α_0 eine beliebige reelle Konstante ist. Zu Beschreibung der gesamten Lösungsmenge benötigen wir aber eine weitere von (5.21) linear unabhängige Lösungsfunktion. ((5.21) repräsentiert nur einen Teil der Lösungsmenge.)

Zusächst betrachten wir eine Lösungsfunktion (5.21) für eine spezielle Konstante α_0 . Benötigt wird dazu die Eulersche Γ -Funktion, auf die wir im nächsten Abschnitt eingehen. Wir setzen:

$$\alpha_0 := \frac{1}{\Gamma(m+1) \cdot 2^m}$$

und verwenden im Vorgriff auf ein Ergebnis des nächsten Abschnitts die Beziehung:

$$(m+1)(m+2)\cdots(m+k) = \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)}$$

Damit erhält man, wenn man obiges spezielle α_0 in (5.21) einsetzt, die folgende spezielle Lösung der Besselschen DGL (5.17):

$$\begin{aligned} J_m(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+m} k! \Gamma(m+k+1)} x^{2k+m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Definition 5.3 Die Funktion $J_m(x)$, definiert nach (5.22), heißt Besselfunktion 1. Art. Sie ist eine spezielle Lösungsfunktion der Besselschen DGL zum Parameter m .

Wir nehmen nun an, wir hätten den Potenzreihenansatz (5.18) nicht mit dem Parameter m , sondern mit $-m$ durchgeführt, d.h. wir hätten die Reihe

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{-m+\nu}$$

in die Besselsche DGL eingesetzt. Die gesamte Rechnung würde dann völlig analog verlaufen, so dass im Ergebnis m überall durch $-m$ zu ersetzen wäre. Eine wichtige **Einschränkung** muß aber gemacht werden: m darf keine natürliche Zahl sein.

Grund: In der Lösungsfunktion treten die folgenden Faktoren im Nenner auf: $(-m+1)(-m+2)\cdots(-m+k)$, und diese wären dann null für hinreichend große k , d.h. die Funktionen sind dann nicht definiert.

Unter der **Voraussetzung**, dass der Parameter $m \notin \mathbb{N}$ ist, ist auch

$$J_{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

eine Lösungsfunktion der Besselschen DGL, und diese ist von $J_m(x)$ linear unabhängig (falls $m \neq 0$). Damit ist unter den genannten Voraussetzungen die Lösungsmenge der Besselschen DGL bestimmt.

Satz 5.5 (Lösungsmenge von (5.17) im Fall $m \notin \mathbb{N}_0$)

Es liege die Besselsche DGL zum Parameter $m \geq 0$ vor, wobei $m \notin \mathbb{N}_0$ sei. Dann ist die Lösungsmenge der DGL mit zwei beliebigen Konstanten c_1 und c_2 gegeben durch

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x)$$

5.4.2 Einschub: Die Eulersche Gammafunktion

Wir tragen einige Eigenschaften der Eulerschen Gammafunktion nach, zunächst ihre Definition.

Definition 5.4 Für $m > 0$ definieren wir $\Gamma(m)$ durch

$$\Gamma(m) := \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

Die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ wird Eulersche Gammafunktion genannt.

Lemma 5.1 Die Γ -Funktion genügt der folgenden Funktionalgleichung:

$$\Gamma(m+1) = m \Gamma(m) \tag{5.23}$$

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ erhält man daraus:

$$\Gamma(m+k+1) = (m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)m\Gamma(m) \tag{5.24}$$

BEWEIS: Zunächst erhält man durch Produktintegration die Beziehung:

$$\begin{aligned} \Gamma(m) &= \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = \left[\frac{1}{m} x^m e^{-x} \right]_0^{x \rightarrow \infty} + \frac{1}{m} \int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx \\ &= 0 + \frac{1}{m} \Gamma(m+1) \end{aligned}$$

woraus folgt: $m \Gamma(m) = \Gamma(m + 1)$. Daraus ergibt sich rekursiv:

$$\begin{aligned} \Gamma(m + 2) &= (m + 1) \Gamma(m + 1) = (m + 1) m \Gamma(m) \\ \Gamma(m + 3) &= (m + 2) \Gamma(m + 2) = (m + 2)(m + 1) m \Gamma(m) \\ &\dots \quad \dots \\ \Gamma(m + k + 1) &= (m + k) \Gamma(m + k) = (m + k) \cdots (m + 2)(m + 1) m \Gamma(m) \end{aligned}$$

□

Insbesondere erhält man aus dem Lemma die im letzten Abschnitt benutzte Beziehung:

$$\Gamma(m + k + 1) = (m + k) \cdots (m + 2)(m + 1) \Gamma(m + 1)$$

Speziell gilt: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{x \rightarrow \infty} = 1$. Daraus folgt für $k \in \mathbb{N}$ rekursiv:

$$\Gamma(k + 1) = k \Gamma(k) = k! \Gamma(1)$$

und somit: $\Gamma(k + 1) = k!$.

5.4.3 Die Lösungsmenge im Fall $m \in \mathbb{N}_0$

Im Abschnitt 8.4.1 haben wir die Lösungsmenge der Besselschen DGL bestimmt für den Fall, dass der Parameter $m \geq 0$ keine Zahl aus \mathbb{N}_0 ist. Wir behandeln nun den verbleibenden Fall, setzen also voraus: $m \in \mathbb{N}_0$.

In diesem Fall setzen wir:

$$J_{-m}(x) := (-1)^m J_m(x) \text{ für jedes } x \in (0, \infty)$$

Beachte, dass in diesem Fall $J_{-m}(x)$ und $J_m(x)$ linear abhängig sind, folglich spannen sie nicht den gesamten Lösungsraum auf.

Man kann nun zeigen (!), dass die Funktion

$$Y_m(x) := \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial \alpha} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=m}$$

eine von $J_m(x)$ linear unabhängige Lösungsfunktion der Besselschen DGL (5.17) ist. Weiter kann gezeigt werden (!), dass diese Funktion explizit gegeben ist durch die Vorschrift:

$$\begin{aligned} Y_m(x) &= \frac{2}{\pi} (C - \ln 2 + \ln x) J_m(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(m - \nu - 1)!}{\nu!} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\nu} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^\nu}{\nu! (m + \nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\nu} (h_{m+\nu} + h_\nu) \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dabei ist $C := 0.5772 \dots$, $h_0 := 0$, $h_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}$ und $h_{m+\nu} := \sum_{k=1}^{m+\nu} \frac{1}{k}$.

Definition 5.5 Die Funktion $Y_m(x)$ heißt Besselsche Funktion 2. Art oder Neumannsche Funktion zum Parameter $m \in \mathbb{N}_0$.

Satz 5.6 (Lösungsmenge von (5.17) im Fall $m \in \mathbb{N}_0$)

Es liege die Besselsche DGL zum Parameter $m \in \mathbb{N}_0$ vor. Dann ist die Lösungsmenge der DGL mit zwei beliebigen Konstanten c_1 und c_2 gegeben durch

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x)$$

Am Ende dieses Kapitels sind einige grundlegende Formeln über Besselfunktionen zusammen gestellt.

5.4.4 Ein Ansatz aus TE, der zu einer Besselschen DGL führt

Ausgangspunkt sei wieder die Laplacesche (partielle) Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{dy^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{dz^2} = 0$$

die wir in Zylinderkoordinaten betrachten (vgl. Satz 2.6):

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.26)$$

Wir gehen nun davon aus, dass von vornherein bekannt sei, dass das Potenzial Φ rotationssymmetrisch zur z -Achse ist. Dann ist die Funktion Φ von der Variablen φ unabhängig, so dass gilt: $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$. Damit vereinfacht sich die Gleichung (5.26) zu:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.27)$$

Wir machen folgenden Produktansatz für das Potenzial Φ

$$\Phi(\varrho, z) := U(\varrho) \cdot Z(z) \quad (5.28)$$

Einsetzen von (5.28) in (5.27) ergibt:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dU}{d\varrho} Z + \frac{d^2 U}{d\varrho^2} Z + U \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Wir können die Variablen in dieser Gleichung separieren, d.h. wir können die von ϱ abhängigen Größen auf die eine Seite, die von z abhängigen auf die andere Seite schreiben. Damit erhalten wir:

$$\frac{1}{U} \left(\frac{d^2 U}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dU}{d\varrho} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (5.29)$$

Da die Variablen ϱ und z unabhängig voneinander variieren können, in der Beziehung (5.29) aber beständig Gleichheit besteht, müssen beide Seiten gleich einer gemeinsamen Konstanten sein. Sie wird mit $-k^2$ angesetzt.

Für die rechte Seite von (5.29) erhält man dann:

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

Es liegt also eine (homogene) lineare DGL mit konstanten Koeffizienten vor, für die uns eine Lösungsmethode aus Mathematik A bekannt ist.

Entsprechend gewinnt man für die linke Seite von (5.29) die folgende DGL:

$$\frac{1}{U} \left(\frac{d^2 U}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dU}{d\varrho} \right) = -k^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 U}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dU}{d\varrho} + k^2 U = 0$$

Die Transformation $\varrho := \frac{x}{k}$ führt unter Beachtung von $d\varrho := \frac{dx}{k}$ zu:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} + U = 0$$

Dies ist eine Besselsche DGL zum Parameter $m = 0$.

Mit Hilfe des Separationsansatzes (5.28) haben wir unter der Annahme eines rotationssymmetrischen Potenzials die (partielle) Laplacesche DGL in zwei gewöhnliche DGLn überführt, für die Lösungsmethoden zur Verfügung stehen.

5.4.5 Formeln über Besselfunktionen*

Besselfunktionen sind in der Literatur ausführlich behandelt worden. Im folgenden werden einige grundlegende Formeln (ohne Begründung) aufgeführt.

Es gibt eine Vielzahl von Formeln, die Besselfunktionen zu verschiedenem Index m miteinander in Beziehungen setzen, wie etwa die folgenden:

$$\begin{aligned} \text{a) } J_{m+1}(x) &= \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x) \\ \text{b) } J_{m-1}(x) &= \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x) \\ \text{c) } J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x) \\ \text{d) } J_{m-1}(x) &= \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) \end{aligned}$$

Man kann beispielsweise die Rekursionsformel c) benutzen, um aus $J_0(x)$ und $J_1(x)$ sukzessive die Besselfunktionen $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_4(x)$ usw. herzuleiten. Ebenso

kann man mit Hilfe der Formel d) aus $J_0(x)$ und $J_1(x)$ die Besselfunktionen $J_{-2}(x)$, $J_{-3}(x)$, $J_{-4}(x)$ usw. ableiten.

Man kann zeigen, dass gilt:

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right) \sin x \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right) \cos x$$

In der oben beschriebenen Weise kann man daraus sukzessive die Besselfunktionen

$$J_{3/2}(x), J_{5/2}(x), \dots \quad \text{bzw.} \quad J_{-3/2}(x), J_{-5/2}(x), \dots$$

herleiten.

Verwendet wird häufig folgende Integraldarstellung, die für die Indizes $m = 0, 1, 2, \dots$ gilt:

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - m\varphi) d\varphi$$

Weitere Eigenschaften über Besselfunktionen findet man in mathematischen Nachschlagwerken („Bronstein“).

Anhang A

Laplace-Korrespondenzen

Nr.	$F(s)$	$f(t)$
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\frac{1}{s}$	1
3.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
4.	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a} e^{-t/a}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t
6.	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
7.	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
8.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
9.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
10.	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$
11.	$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-t/a}$
12.	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
13.	$\frac{1}{(1+as)^2}$	$\frac{1}{a^2} te^{-t/a}$
14.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
15.	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{e^{-t/a}-e^{-t/b}}{a-b}$
16.	s	$\dot{\delta}(t)$
17.	s^2	$\ddot{\delta}(t)$
18.	$\frac{1}{s^2+2ds+(d^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega} e^{-dt} \sin \omega t$
19.	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) e^{at}$
20.	$\frac{s}{(1+at)^2}$	$\frac{1}{a^3} (a-t) e^{-t/a}$
21.	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
22.	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{ae^{-t/b}-be^{-t/a}}{ab(a-b)}$

Nr.	$F(s)$	$f(t)$
23.	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
24.	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
25.	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - 1 - at)$
26.	$\frac{1}{s^2(1+as)}$	$ae^{-t/a} + t - a$
27.	$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{1}{a^2} [1 + (at - 1)e^{at}]$
28.	$\frac{1}{s(1+as)^2}$	$1 - \frac{a+t}{a} e^{-t/a}$
29.	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a-b)}$
30.	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1 + \frac{ae^{-t/a} - be^{-t/b}}{b-a}$
31.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
32.	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{a(b-c)e^{-t/a} + b(c-a)e^{-t/b} + c(a-b)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
33.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{e^{at} - [1 + (a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
34.	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{abe^{-t/a} - [ab + (a-b)t]e^{-t/b}}{b(a-b)^2}$
35.	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$
36.	$\frac{1}{(1+as)^3}$	$\frac{1}{2a^3} t^2 e^{-t/a}$
37.	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2} [1 - \cos at]$
38.	$\frac{1}{s(s^2-a^2)}$	$\frac{1}{a^2} [\cosh at - 1]$
39.	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a(b-c)e^{at} + b(c-a)e^{bt} + c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
40.	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{a^2(b-c)e^{at} + b^2(c-a)e^{bt} + c^2(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
41.	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{(b-c)e^{-t/a} + (a-c)e^{-t/b} + (b-a)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$
42.	$\frac{s^2}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{bc(b-c)e^{-t/a} + ac(c-a)e^{-t/b} + ab(a-b)e^{-t/c}}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$
43.	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
44.	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$	$\frac{a^2e^{at} - [2ab - b^2 + b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
45.	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{-b^2 e^{-t/a} + [b^2 + (a-b)t]e^{-t/b}}{b^2(a-b)^2}$
46.	$\frac{s^2}{(1+as)(1+bs)^2}$	$\frac{b^3 e^{-t/a} + [ab(a-2b) - (a-b)at]e^{-t/b}}{ab^3(a-b)^2}$
47.	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right) e^{at}$
48.	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(1 + 2at + \frac{1}{2}a^2t^2\right) e^{at}$
49.	$\frac{s}{(1+as)^3}$	$\left(\frac{t}{a^3} - \frac{t^2}{2a^4}\right) e^{-t/a}$
50.	$\frac{s^2}{(1+as)^3}$	$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{2t}{a^4} + \frac{t^2}{2a^5}\right) e^{-t/a}$
51.	$\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$	$\cos^2 at$
52.	$\frac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$	$\cosh^2 at$

Nr.	$F(s)$	$f(t)$
53.	$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$	$\sin^2 at$
54.	$\frac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$	$\sinh^2 at$
55.	$\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$	$\cos^2 at$
56.	$\frac{a^3}{s^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cosh \frac{a}{\sqrt{2}}t \sin \frac{a}{\sqrt{2}}t - \sinh \frac{a}{\sqrt{2}}t \cos \frac{a}{\sqrt{2}}t \right)$
57.	$\frac{a^2s}{s^4+a^4}$	$\sin \frac{a}{\sqrt{2}}t \sinh \frac{a}{\sqrt{2}}t$
58.	$\frac{as^2}{s^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{2}}t \sinh \frac{a}{\sqrt{2}}t + \sin \frac{a}{\sqrt{2}}t \cosh \frac{a}{\sqrt{2}}t \right)$
59.	$\frac{s^3}{s^4+a^4}$	$\cos \frac{a}{\sqrt{2}}t \cosh \frac{a}{\sqrt{2}}t$
60.	$\frac{a^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2} (\sinh at - \sin at)$
61.	$\frac{a^2s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2} (\cosh at - \cos at)$
62.	$\frac{as^2}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2} (\sinh at + \sin at)$
63.	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2} (\cosh at + \cos at)$
64.	$\frac{2a^2s}{s^4+4a^4}$	$\sin at \sinh at$
65.	$\frac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$	$\cos at \sinh at$
66.	$\frac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$	$\sin at \cosh at$
67.	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at \cosh at$
68.	$\frac{a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at - at \cos at)$
69.	$\frac{as}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \sin at$
70.	$\frac{as^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sin at + at \cos at)$
71.	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{at}{2} \sin at$
72.	$\frac{a^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (at \cosh at - \sinh at)$
73.	$\frac{as}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2} \sinh at$
74.	$\frac{as^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (\sinh at + at \cosh at)$
75.	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{at}{2} \sinh at$
76.	$\frac{ab}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$
77.	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$
78.	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$
79.	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
80.	$\frac{ab}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\frac{b \sinh at - a \sinh bt}{a^2 - b^2}$
81.	$\frac{s}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\frac{\cosh at - \cosh bt}{a^2 - b^2}$
82.	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\frac{a \sinh at - b \sinh bt}{a^2 - b^2}$
83.	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$\frac{a^2 \cosh at - b^2 \cosh bt}{a^2 - b^2}$

Nr.	$F(s)$	$f(t)$
84.	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3} (at - \sin at)$
85.	$\frac{1}{s^2(s^2-a^2)}$	$\frac{1}{a^3} (\sinh at - at)$
86.	$\frac{a^2 b^2}{s(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cos at - a^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
87.	$\frac{a^2 b^2}{s(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cosh at - a^2 \cosh bt}{a^2 - b^2}$
88.	$\frac{a^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8} [(3 + a^2 t^2) \sinh at - 3at \cosh at]$
89.	$\frac{s \sin b + a \cos b}{s^2 + a^2}$	$\sin(at + b)$
90.	$\frac{s \cos b - a \sin b}{s^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$