Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Prof. Dr. M. Heilmann
Fachbereich C, Mathematik
Bergische Universität Wuppertal

September 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Aussagenlogik

1.1 Definition
Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist.
Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

1.2 Beispiel

A: 169 ist eine Primzahl. (f)
B: 169 ist eine Quadratzahl. (w)
C: Wien ist die Hauptstadt der Schweiz. (f)
D: Der Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler ist nützlich.
Keine Aussage, da die Behauptung nicht objektiv als wahr oder falsch klassifiziert werden kann, auch wenn wir hoffen, dass viele von Ihnen das am Kursende subjektiv so empfinden.

1.3 Bezeichnung
Ist A eine Aussage, so bezeichnet $\neg A$ (gesprochen "nicht A") die Negation der Aussage A.
$\neg A$ ist wieder eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist und umgekehrt.

Wahrheitstafel von $\neg A$

A	$\neg A$
w	**f**
f	**w**

1.4 Beispiel

A: $2 + 2 = 4$ (w)
$\neg A$: $2 + 2 \neq 4$ (f)
B: Alle Menschen sind sterblich. (w)
$\neg B$: Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)

Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Negationen genau auf die Formulierung zu achten ist.

C: Alle Menschen sind unsterblich. Dies ist **nicht** die Negation der Aussage B.
D: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $n + 3 = 6$. (f)
$\neg D$: Es existiert eine natürliche Zahl n, so dass $n + 3 \neq 6$ gilt. (w)

Verknüpfungen von Aussagen

1.5 Definition
Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \wedge B$ (gesprochen "A und B") eine neue Aussage, die Konjunktion von A und B definiert.
$A \wedge B$ ist eine wahre Aussage, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind. Anders ausgedrückt ist $A \wedge B$ falsch, wenn (mindestens) eine der beiden Aussagen falsch ist.

Wahrheitstafel von $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**f**
f	f	**f**

1.6 Beispiel

A: $2 + 2 = 4$ (w)
B: 169 ist eine Primzahl (f)
C: 169 ist eine Quadratzahl (w)
$A \wedge B$: $2 + 2 = 4$ und 169 ist eine Primzahl. (f)
$A \wedge C$: $2 + 2 = 4$ und 169 ist eine Quadratzahl. (w)
$B \wedge C$: 169 ist eine Primzahl und eine Quadratzahl. (f)

1.7 Definition
Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (gesprochen “A oder B”) eine neue Aussage, die Disjunktion (nicht ausschließendes *oder*) von A und B definiert.
$A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. Anders ausgedrückt ist $A \vee B$ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind.
(Meint man “*entweder* A oder B”, so schreibt man $A\dot{\vee}B$ und spricht vom “*exklusiven* oder”.)

Wahrheitstafel von $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
w	w	**w**
w	f	**w**
f	w	**w**
f	f	**f**

1.8 Beispiel
A: $2 + 2 = 4$ (w)
B: 169 ist eine Primzahl (f)
C: 169 ist eine Quadratzahl (w)
$A \vee B$: $2 + 2 = 4$ oder 169 ist eine Primzahl. (w)
$A \vee C$: $2 + 2 = 4$ oder 169 ist eine Quadratzahl. (w)
$B \vee C$: 169 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl. (w)

1.9 Bemerkung
Das letzte Beispiel macht noch einmal deutlich, dass sich das aussagenlogische “oder” wesentlich vom üblichen Sprachgebrauch unterscheidet.
In der lateinischen Sprache gibt es die Wörter “vel” für das nicht ausschließende “oder” und “aut” für das exklusive “oder”.

1.10 Definition
Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \Rightarrow B$ (gesprochen “wenn A dann B” oder “aus A folgt B”) wieder eine Aussage, die Implikation (Folgerung) genannt, definiert.
Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist nur dann eine falsche Aussage, wenn A wahr und B falsch ist.
(Aus einer wahren kann keine falsche Aussage folgen! Aus einer falschen Aussage kann aber eine wahre Aussage folgen!)

Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**w**
f	f	**w**

1.11 Beispiel
A: 2 ist Teiler von 18. (w)
B: 4 ist Teiler von 18. (f)
$A \Rightarrow B$: Wenn 2 Teiler von 18 ist, dann ist 4 Teiler von 18. (f)
$B \Rightarrow A$: Wenn 4 Teiler von 18 ist, dann ist 2 Teiler von 18. (w)

1.12 Bezeichnung
Sind A und B Aussagen, dann ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die mit $A \Leftrightarrow B$ (gesprochen “A äquivalent zu B” oder “A genau dann wenn B“) abgekürzt wird.
$A \Leftrightarrow B$ ist eine wahre Aussage, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben, d.h. entweder beide wahr oder beide falsch sind. Es geht also um die Gleichwertigkeit des Wahrheitsgehaltes zweier Aussagen.

Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	**w**
w	f	f	w	**f**
f	w	w	f	**f**
f	f	w	w	**w**

1.13 Beispiel

A: 2 ist Teiler von 18. (w)
B: 4 ist Teiler von 18. (f)
$A \Rightarrow B$: Wenn 2 Teiler von 18 ist, dann ist 4 Teiler von 18. (f)
$B \Rightarrow A$: Wenn 4 Teiler von 18 ist, dann ist 2 Teiler von 18. (w)
$A \Leftrightarrow B$: 2 ist Teiler von 18, genau dann wenn 4 Teiler von 18 ist. (f)

Wie wir gesehen haben, ergibt die Negation und die Verknüpfung von Aussagen wieder Aussagen, die sich ihrerseits nun wieder zu neuen Aussagen verknüpfen lassen. Dies kann mitunter recht kompliziert werden. Im Folgenden sind nun einige Umformungsregeln aufgelistet, die sich mit Hilfe von Wahrheitstafeln nachpüfen lassen.

Umformungsregeln

a) $A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$ (Kommutativgesetz)

b) $A \vee B \Longleftrightarrow B \vee A$ (Kommutativgesetz)

c) $A \wedge (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ (Assoziativgesetz)

d) $A \vee (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (Assoziativgesetz)

e) $A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetz)

f) $A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz)

g) $\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$ (Doppelte Verneinung)

h) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ (Regel von De Morgan)

i) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ (Regel von De Morgan)

Wahrheitstafel zu $A \wedge (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$
w	w	w	w	**w**	w	**w**
w	w	f	f	**f**	w	**f**
w	f	w	f	**f**	f	**f**
w	f	f	f	**f**	f	**f**
f	w	w	w	**f**	f	**f**
f	w	f	f	**f**	f	**f**
f	f	w	f	**f**	f	**f**
f	f	f	f	**f**	f	**f**

Wahrheitstafel zu $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	**w**	w	w	**w**
w	w	f	w	**w**	w	f	**w**
w	f	w	w	**w**	f	w	**w**
w	f	f	f	**f**	f	f	**f**
f	w	w	w	**f**	f	f	**f**
f	w	f	w	**f**	f	f	**f**
f	f	w	w	**f**	f	f	**f**
f	f	f	f	**f**	f	f	**f**

Weitere Wahrheitstafeln zu den Umformungsregeln in den Übungen!

1.14 Beispiel
Wir machen uns die Bedeutung des Assoziativgesetzes $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$ an einem Beispiel klar.

A:	2 ist Teiler von 6. (w)
B:	3 ist Teiler von 6. (w)
C:	4 ist Teiler von 6. (f)
$A \wedge (B \wedge C)$:	2 Teiler von 6 und (3 und 4 Teiler von 6) (f)
$(A \wedge B) \wedge C$:	(2 und 3 Teiler von 6) und 4 Teiler von 6 (f)

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Klammern weggelassen werden dürfen.
Man kann auch sagen: 2 und 3 und 4 sind Teiler von 6. (f)

1.15 Beispiel
Wir schauen uns ein Beispiel zur doppelten Verneinung $\neg(\neg A) \iff A$ an.

A:	2 ist Teiler von 6. (w)
$\neg A$:	2 ist nicht Teiler von 6. (f)
$\neg(\neg A)$:	Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)
B:	Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)
$\neg B$:	Es gilt nicht, dass jede Primzahl $p > 2$ ungerade ist. (f)
	Es existiert eine Primzahl $p > 2$, die gerade ist. (f)
$\neg(\neg B)$:	Es gilt nicht, dass es eine Primzahl $p > 2$ gibt, die gerade ist. (w)
	bzw. Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

1.16 Definition
Eine Aussage, die aus der Verknüpfung mehrerer Aussagen hervorgeht, ist eine Tautologie, wenn für alle möglichen Wahrheitswerte der für die Verknüpfung verwendeten Aussagen, die Aussage insgesamt stets wahr ist.

1.17 Beispiel
$A \vee (\neg A)$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten) ist eine Tautologie.
Es regnet oder es regnet nicht. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Wahrheitstafel von $A \vee (\neg A)$

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
w	f	**w**
f	w	**w**

$\neg(A \wedge (\neg A))$ (Gesetz vom Widerspruch) ist eine Tautologie.
Es regnet und es regnet nicht ist immer falsch, die Negation daher stets richtig.

Wahrheitstafel von $\neg(A \wedge (\neg A))$

A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$	$\neg(A \wedge (\neg A))$
w	f	f	**w**
f	w	f	**w**

$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

Wahrheitstafel von $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$
w	w	w	f	w	**w**
w	f	f	f	f	**w**
f	w	w	w	w	**w**
f	f	w	w	w	**w**

1.18 Definition
Eine Aussageform ist eine Behauptung, die eine oder mehrere Variable enthält. Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn für die Variablen Objekte des zugehörigen Grundbereiches eingesetzt werden.
Geht für ein Objekt des Grundbereiches die Aussageform in eine wahre Aussage über, dann nennt man dieses Objekt Lösung der Aussageform.

1.19 Beispiel
Grundbereich: $\mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen)

$A(x)$:	$x + 7 = 0$	ist eine Aussageform mit der Variablen x.
$A(-7)$:	$-7 + 7 = 0$ (w)	ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (w).
$A(0)$:	$0 + 7 = 0$ (f)	ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (f).

Aussageformen mit demselben Grundbereich kann man wie Aussagen miteinander verknüpfen und erhält wieder eine Aussageform.

1.20 Beispiel
Wir wollen an einem einfachen Beispiel zeigen, wie wichtig das "saubere Argumentieren", d.h. die konsequente und richtige Anwendung der logischen Regeln ist.
Dazu betrachten wir den "mal eben" locker hingeschriebenen Lösungsversuch zu der Aufgabe:
Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$x + 2 = \sqrt{4 - x}\,.$$

Lösungsversuch: Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung und erhalten

$$(x + 2)^2 = 4 - x\,.$$

Nun rechnen wir auf der linken Seite das Quadrat aus

$$x^2 + 4x + 4 = 4 - x\,,$$

subtrahieren auf beiden Seiten $4 + 4x$

$$x^2 = -5x\,,$$

dividieren noch durch x und bekommen

$$x = -5\,.$$

Fertig!!!

Machen wir doch mal die Probe:
Einsetzen von $x = -5$ in die linke Seite der Gleichung ergibt $-5 + 2 = -3$.
Einsetzen von $x = -5$ in die rechte Seite der Gleichung ergibt $\sqrt{4 - (-5)} = 3$.

???

Offensichtlich ist da was falsch gelaufen. Wir schreiben nun die Lösung korrekt auf, und sehen, an welchen Stellen Fehler in der Argumentation gemacht wurden.

	$x + 2 = \sqrt{4 - x}$	
$\Longrightarrow$	$(x + 2)^2 = 4 - x$	Quadrieren einer Gleichung ist i. a. **keine** Äquivalenzumformung.
$\Longleftrightarrow$	$x^2 = -5x$	Addition, Subtraktion gleicher Terme auf beiden Seiten ist eine Äquivalenzumformung.
$\Longleftrightarrow$	$x = 0 \vee x = -5$	Division durch Null ist nicht erlaubt!

Da an einer Stelle nicht das Äquivalenzzeichen steht, muss man die erhaltenen Werte noch in die Ausgangsgleichung einsetzen. Dies zeigt, dass nur $x = 0$ Lösung ist.

2 Grundlagen der Mengenlehre

2.1 Definition
Als *Menge* bezeichnet man die Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte, die *Elemente* genannt werden. Eine Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit dem Symbol $\{\ \}$ (oder $\emptyset$) bezeichnet. Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Man schreibt dann $A = B$.

2.2 Beispiel

a) Menge der Teilnehmer am Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

b) Menge der Zahlen 2,3,5,7.

c) Menge der Telefonnummern in Dortmund.

2.3 Bezeichnung
Mengen werden in der Regel mit großen Buchstaben, die Elemente mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Notationen:

a) $x \in A : x$ ist Element von A.

b) $x \notin A : x$ ist nicht Element von A.

Beschreibung von Mengen

Man unterscheidet die aufzählende und die beschreibende Form. Bei der aufzählenden Form werden alle Elemente in beliebiger Reihenfolge zwischen zwei geschweiften Klammern aufgelistet, z. B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ oder auch } A = \{2, 5, 1, 4, 3\}\,.$$

Häufig ist es unpraktisch oder auch nicht möglich, eine Menge in der aufzählenden Form anzugeben. Bei der beschreibenden Form werden die Elemente mit Hilfe von Aussageformen unter Angabe der Grundmenge spezifiziert, z. B.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le 5\}\,.$$

Beziehungen zwischen Mengen

2.4 Definition
$A \subseteq B$ (gesprochen "A ist Teilmenge von B"), wenn jedes Element von A auch Element von B ist, d.h.

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Verknüpfungen von Mengen

2.5 Definition
Als *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu A *und* zu B gehören, d. h.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ist $A \cap B = \{\ \}$, so heißen A und B *disjunkt*.
Die *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A *oder* zu B gehören, d. h.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Die *Differenzmenge* $A \backslash B$ von A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören, d. h.

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Das Komplement $\mathcal{C}(A)$ einer Menge A bezogen auf eine Grundmenge Ω besteht aus allen Elementen von Ω, die nicht zu A gehören, d. h.

$$\mathcal{C}(A) = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega \backslash A$$

2.6 Beispiel
Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Studierenden an der Bergischen Universität Wuppertal.

W:	Menge aller Studierenden der Wirtschaftswissenschaften
F:	Menge aller weiblichen Studierenden
M:	Menge aller männlichen Studierenden
S:	Menge aller Studierenden, die im Unichor singen
B:	Menge aller Studierenden, die Basketball spielen

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega\backslash W$:	Alle Studierenden, die nicht Wirtschaftswissenschaften studieren
$W \cup S$:	Alle Studierenden, die Wirtschaftswissenschaften studieren oder im Unichor singen
$M \cap B$:	Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen
$W\backslash(B \cap S)$:	Studierende der Wirtschaftswissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen
$(W\backslash S) \cup (W\backslash B)$:	Studierende der Wirtschaftswissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen
$\mathcal{C}(F \cup M)$:	Leere Menge

Regeln für die Verknüpfung von Mengen

a) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)

b) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Assoziativgesetz)

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativgesetz)

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetz)

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)

g) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ (Regel von De Morgan)

h) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$ (Regel von De Morgan)

2.7 Definition
Seien A und B Mengen. Unter dem *Kreuzprodukt* $A \times B$ von A und B versteht man die Menge aller möglichen geordneten Paare (a, b), wobei die erste Komponente aus A und die zweite Komponente aus B ist, d. h.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

2.8 Beispiel

$$\{1, 2\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

3 Zahlenmengen und kombinatorische Grundlagen

3.1 Bezeichnung

a) Menge der naürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

b) Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

c) Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Da sich jeder Bruch als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen lässt (z. B. $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$), kann man die rationalen Zahlen auch angeben als $\mathbb{Q} = \{x : x$ endliche oder periodische Dezimalzahl$\}$.

d) Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R} = \{x : x$ endliche oder unendliche Dezimalzahl$\}$
Zu den rationalen Zahlen kommen bei den reellen Zahlen die unendlichen, nichtperiodischen Dezimalzahlen dazu. Dies sind die sogenannten irrationalen Zahlen wie z. B. π, $\sqrt{2}$.

e) Wenn wir festlegen wollen, dass wir von einer Zahlenmenge nur die nichtnegativen Elemente bzw. die von Null verschiedenen Elemente betrachten wollen, so kennzeichnen wir dies mit einem tiefgestellten "+" bzw. einem hochgestellten "$*$", also
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b heißt (endliches) Intervall, a und b heißen Randpunkte des Intervalls. Es wird unterschieden, ob Randpunkte zum Intervall dazugehören oder nicht. Im einzelnen verwenden wir die folgenden Bezeichnungen.

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ abgeschlossenes Intervall von } a \text{ bis } b \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ offenes Intervall von } a \text{ bis } b \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ halboffenes Intervall von } a \text{ bis } b \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ halboffenes Intervall von } a \text{ bis } b
\end{aligned}$$

Die Länge der Intervalle beträgt jeweils $b - a$.
Auch gewisse unbeschränkte Mengen werden als (unendliche) Intervalle bezeichnet und mit Hilfe des Symbols ∞ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

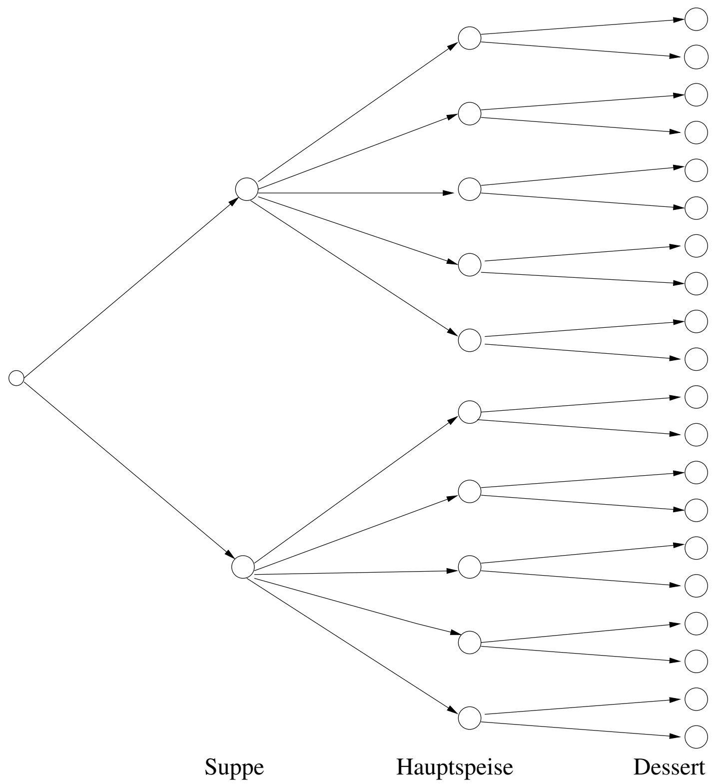
Kombinatorische Grundlagen

In vielen ökonomischen Fragestellungen treten Fragestellungen auf, bei denen verschiedene Möglichleiten der Anordnung und Zusammenstellung von Elementen einer Menge zu bestimmen sind. Aufgabenstellungen dieser Art werden in der Kombinatorik behandelt.
Im Folgenden werden die verschiedenen Fragestellungen zunächst jeweils an einem Beispiel erläutert und dann in allgemeiner Form behandelt.

Multiplikationssatz

3.2 Beispiel

Ein Restaurant bietet auf seiner Mittagskarte zwei verschiedene Suppen, fünf Hauptgerichte und zwei Desserts an. Wie viele verschiedene Menüs lassen sich daraus zusammenstellen?
Wir veranschaulichen die Situation zunächst mit Hilfe eines Baumdiagramms.



Aus dem Baumdiagramm lässt sich die Anzahl der Möglichkeiten als 20 ablesen. Bei größeren Zahlen ist die Erstellung eines vollständigen Baumdiagramms aufwändig und wir überlegen daher, wie man die Aufgabe rechnerisch lösen kann.
Jede der beiden Suppen kann mit jedem der fünf Hauptgerichte kombiniert werden, und jede dieser Kombinationen kann wiederum mit jedem der beiden Desserts kombiniert werden. Es gibt also insgesamt

$$2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ verschiedene Menüzusammenstellungen.}$$

Allgemein gilt nun der Multiplikationssatz der Kombinatorik.

3.3 Satz
Seien $k \in \mathbb{N}$ und $m_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$. Wählt man aus jeder von k Mengen, die jeweils m_i Elemente enthalten genau ein Element aus, so gibt es dafür insgesamt

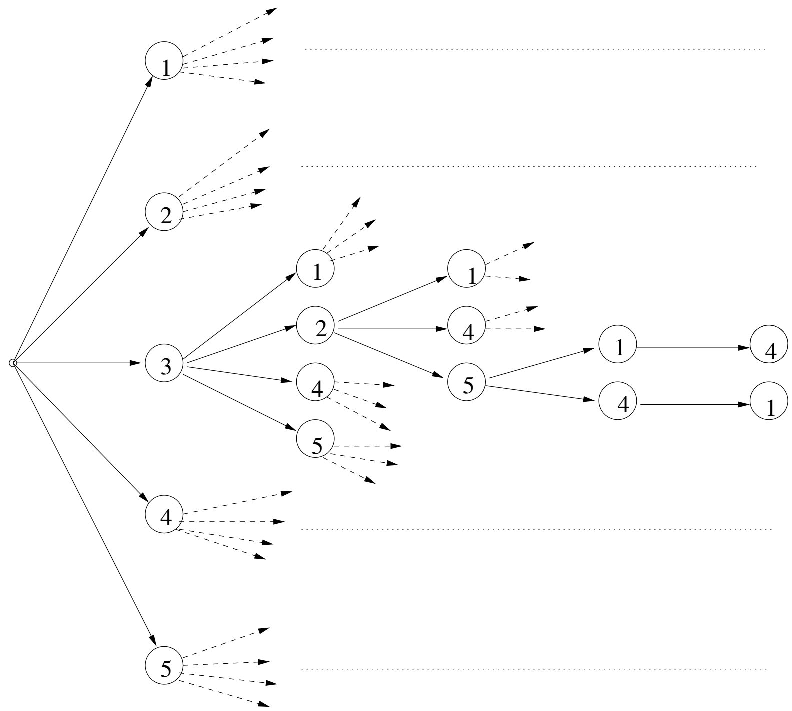
$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \text{ Möglichkeiten.}$$

3.4 Beispiel
Wie viele gerade vierstellige Zahlen lassen sich bilden, wenn die erste und die dritte Ziffer ungerade sein sollen?
Für die erste und dritte Ziffer gibt es jeweils 5, für die zweite 10 und für die vierte Ziffer wieder 5 Möglichkeiten, insgesamt also

$$5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 1250 \text{ Möglichkeiten.}$$

Permutationen

3.5 Beispiel
Ein Arzt soll nacheinander Hausbesuche bei fünf seiner Patienten machen. Wie viele Möglichkeiten in Bezug auf die Reihenfolge der Patienten hat der Arzt, seine Hausbesuche zu erledigen?
Wir verdeutlichen uns die Situation zunächst wieder mit Hilfe eines Baumdiagramms.



Für den ersten Hausbesuch kommen alle fünf Patienten in Frage, zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den zweiten Hausbesuch noch vier Möglichkeiten u.s.w. bis für den letzten Hausbesuch nur noch jeweils eine Möglichkeit besteht, insgesamt also

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ Möglichkeiten.}$$

Haben wir allgemein eine Menge mit n Elementen gegeben, so bezeichnen wir jede mögliche Anordnung der n Elemente als Permutation der Elemente. Über die Anzahl der möglichen Permutationen gibt der folgende Satz Auskunft.

3.6 Satz
Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt

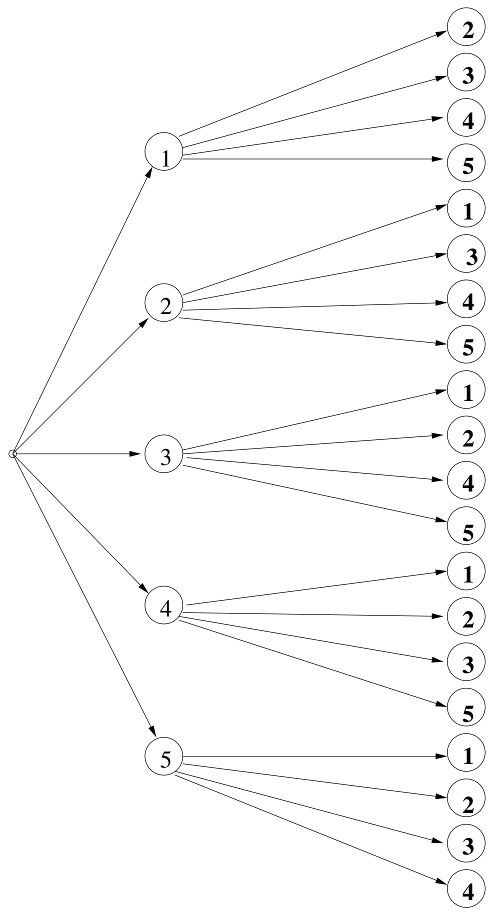
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ (gesprochen “}n\text{ Fakultät”) Möglichkeiten,}$$

n unterscheidbare Elemente anzuordnen.

3.7 Beispiel
Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es?
Da es sich um fünf verschiedene Buchstaben handelt, gibt es $5! = 120$ Permutationen.
Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es, wenn jede mit a c beginnen soll?
Da die ersten zwei Buchstaben bereits festgelegt sind, gibt es noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

Auswahl mit Berücksichtigung der Reihenfolge

3.8 Beispiel
Ein Arzt will zwei von fünf fälligen Hausbesuchen vor seiner Sprechstunde erledigen, die restlichen drei kann er erst nach der Sprechstunde machen. Wie viele verschiedenen Möglichkeiten gibt es für den Arzt, seine Route für die Hausbesuche vor der Sprechstunde zu planen?



Aus dem Baumdiagramm ergeben sich

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ Möglichkeiten.}$$

Allgemein gilt der folgende Satz.

3.9 Satz
Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Arten auswählen.

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

3.10 Beispiel
Beim Lottospiel werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?
Wir starten mit folgender Überlegung: Wenn wir zunächst die Reihenfolge der getippten Zahlen berücksichtigen, so gibt es $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.
Beim Lottospiel ist aber die Reihenfolge unerheblich. Es ist egal, ob z. B. $1, 2, 7, 15, 17, 39$ oder $2, 7, 39, 15, 17, 1$ getippt wird. Man kann diese 6 Zahlen auf $6!$ verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert. Bei den oben genannten $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp $6!$ mal vor. Um die Anzahl der verschiedenen Tipps zu erhalten, muss man also noch durch $6!$ dividieren.

Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Allgemein gilt nun:

3.11 Satz
Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Arten auswählen.

Für $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ wird die abkürzende Schreibweise $\binom{n}{k}$ (gesprochen "n über k") benutzt.

4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und Beträge

Potenzen und Wurzeln

4.1 Definition
Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die n-te Potenz von a. Dabei heißt a Basis und n Exponent.
Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1\,, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}\,.$$

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

die eindeutig bestimmte nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.
Für $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

4.2 Beispiel

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \\ 3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ 16^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{16} = 2 \text{ da } 2^4 = 16 \\ 4^{\frac{3}{2}} &= \left(\sqrt{4}\right)^3 = \sqrt{4^3} = 8 \end{aligned}$$

4.3 Beispiel
Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen. Sein Guthaben beträgt nach

$$\begin{aligned} \text{einem Jahr} \quad K_1 &= K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100}) \\ \text{zwei Jahren} \quad K_2 &= K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^2 \\ \ldots \\ n \text{ Jahren} \quad K_n &= K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n \end{aligned}$$

Dies ist die Zinseszinsformel.

Frau Kramer benötigt in n Jahren einen Betrag von K_n €. Wie kann sie ausrechnen, welches Kapital sie heute anlegen muss, wenn die Bank ihr Kapital jährlich mit einer Zinsrate von $p\%$ verzinst und die Zinsen jeweils dem Kapital gutschreibt. Aus dem ersten Beispiel sieht man:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n \quad \Longleftrightarrow \quad K_0 = K_n \cdot (1 + \frac{p}{100})^{-n}$$

Rechenregeln und Vereinbarungen
Im Umgang mit Potenzen und zur Vereinfachung von Ausdrücken mit Potenzen müssen die folgenden Rechenregeln sicher beherrscht werden.

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ a^r \cdot b^r &= (ab)^r \\ (a^r)^s &= a^{r\cdot s} = (a^s)^r \\ \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r} \\ a^{b^r} &= a^{(b^r)} \end{aligned}$$

4.4 Beispiel

$$4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3\cdot 3} = 4^9 \quad \text{aber} \quad \left(4^3\right)^2 = (4\cdot 4\cdot 4)^2 = 4^6$$

$$\begin{aligned} \left(27x^{3p}y^{6q}z^{12r}\right)^{\frac{1}{3}} &= 3x^p y^{2q} z^{4r} \\ \frac{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^9}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt[10]{a}\cdot b^2} &= a^{\frac{3}{10}} b \\ \frac{\left[(3a)^{-1}\right]^{-2}\left(2a^{-2}\right)^{-1}}{a^{-3}} &= \frac{9}{2}\cdot a^7 \\ \left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{2}{7}} &= x^{\frac{2}{21}} = \sqrt[21]{x^2} \end{aligned}$$

Logarithmen

4.5 Definition
Seien $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ (d. h. a positive, von 1 verschiedene reelle Zahl) und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist $\log_a x$ (gesprochen "Logarithmus von x zur Basis a") derjenige Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten, d. h.

$$\log_a x = u \Longleftrightarrow a^u = x\,.$$

Für Logarithmen zur Basis 10 verwendet man statt $\log_{10} x$ auch abkürzend die Schreibweise $\lg x$, für Logarithmen zur Basis e verwendet man statt $\log_{\mathrm{e}} x$ auch $\ln x$ (natürlicher Logarithmus).

4.6 Beispiel

$$\begin{aligned} \log_2 8 = 3\,, &\quad \text{denn} \quad 2^3 = 8 \\ \lg 100 = 2\,, &\quad \text{denn} \quad 10^2 = 100 \\ \log_9 3 = \frac{1}{2}\,, &\quad \text{denn} \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \\ \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2\,, &\quad \text{denn} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

Rechenregeln
Auch wenn im Zeialter der Computer und Taschenrechner nicht mehr mühselig mit Logarithmentafeln gearbeitet werden muss, ist die Beherrschung der Rechenregeln für den Logarithmus wichtig.

Für $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \\ \log_a(a^x) &= x \\ \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^p &= p \log_a x \end{aligned}$$

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \quad \text{bzw.} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Die ersten beiden Regeln bedeuten, dass das Logarithmieren sozusagen die Anwendung der entsprechenden Exponentialfunktion "rückgängig" macht. Dazu später mehr.
Die letzte Regel benötigt man zur Umrechnung in andere Basen (Taschenrechner!).

4.7 Beispiel
Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_2(8x^2) &= \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2\log_2 x \\ \lg\left(\frac{100}{x^5}\right) &= \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5\lg x \end{aligned}$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$$

4.8 Beispiel
Herr Huber bekommt von seinem Arbeitgeber eine jährliche Gehaltssteigerung von 4% zugsagt. Er überlegt, nach wie viel Jahren er zum ersten Mal mehr als doppelt soviel verdient.
Mit der Bezeichnung G für Herrn Hubers derzeitiges Gehalt lösen wir zunächst die Gleichung

$$\begin{array}{rcl} & 2G = G\left(1 + \frac{4}{100}\right)^t & |: G \text{ Beachte } G > 0 \\ \Longleftrightarrow & 2 = 1.04^t & |\text{Anwendung Logarithmus auf beiden Seiten} \\ \Longleftrightarrow & \lg 2 = \lg(1.04^t) & |\text{Anwendung Rechenregel Logarithmus} \\ \Longleftrightarrow & \lg 2 = t \cdot \lg 1.04 & \\ \Longleftrightarrow & \frac{\lg 2}{\lg 1.04} = t & \end{array}$$

Da $\frac{\lg 2}{\lg 1.04} \approx 17.67$, vrdient Herr Huber nach 18 Jahren zum ersten Mal mehr als doppelt so viel.

Beträge reeller Zahlen

4.9 Definition
Unter dem Betrag einer reellen Zahl a versteht man geometrisch den Abstand von a zum Ursprung auf der reellen Zahlengeraden, d. h.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}.$$

4.10 Beispiel
Es ist $|4| = 4$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$.
Umschreiben von $|x-2|$ mit Hilfe der Definition des Betrages. Da $|x-2| = x-2$ falls $x-2 \geq 0$, d. h. $x \geq 2$ und $|x-2| = -(x-2) = 2-x$ falls $x-2 < 0$, d. h. $x < 2$, gilt

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{falls } x \geq 2 \\ 2-x & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

$$\begin{array}{lll} x_1 - x_2 & \text{falls} & x_1 \geq x_2\,,\text{d. h. } x_1 - x_2 \geq 0 \text{ und} \\ x_2 - x_1 & \text{falls} & x_2 > x_1\,,\text{d. h. } x_1 - x_2 < 0\,. \end{array}$$

Somit gibt

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ -(x_1 - x_2) & \text{falls } x_1 < x_2 \end{cases}$$

den Abstand zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden an.

4.11 Beispiel
Abstand zwischen 2 und 8: $|2 - 8| = |-6| = 6$
Abstand zwischen -5 und 10: $|-5 - 10| = |-15| = 15$
Abstand zwischen -7 und -3: $|-7 - (-3)| = |-4| = 4$

5 Lösen von Gleichungen

Auch in den Wirtschaftswissenschaften, wie bei nahezu allen Anwendungen der Mathematik, müssen Gleichungen gelöst werden. Insbesondere ist es wichtig, auch mit Gleichungen umgehen zu können, in denen nicht nur die Variable x, sondern auch andere Namen und mehrere Variable vorkommen.
Bei jeder Umformung einer Gleichung muss man sich Klarheit darüber verschaffen, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt.
Zunächst ist jeweils noch festzulegen, für welche Werte eine Gleichung überhaupt zuässig ist, d. h. es muss die Definitonsmenge $\mathbb{D}$ der Gleichung bestimmt werden. Wenn keine weiteren Einschränkungen vorgegeben sind, nehmen wir als Grundmenge die reellen Zahlen an.

5.1 Beispiel
Für welche Werte von p gilt die Gleichung $6p - \dfrac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \dfrac{7}{6}(p+2)$?
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Lösen der Gleichung:

$$\begin{array}{rcl}
 & 6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) & |\text{Klammern ausmultiplizieren} \\
\iff & 6p - p + \frac{3}{2} = 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} & |\text{zusammenfassen} \\
\iff & 5p + \frac{3}{2} = \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p & | + \dfrac{25}{6}p - \dfrac{3}{2} \\
\iff & \frac{55}{6}p = -\frac{5}{6} & | \cdot \dfrac{6}{55} \\
\iff & p = -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} & |\text{kürzen} \\
\iff & p = -\frac{1}{11} &
\end{array}$$

Angabe der Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\dfrac{1}{11}\}$

5.2 Beispiel
Für welche Werte von x gilt die Gleichung $\dfrac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \dfrac{2}{x+3} + 1$?
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0,-3\}$ (da Division durch Null nicht erlaubt)
Lösen der Gleichung:

$$\begin{array}{rcl}
 & \dfrac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \dfrac{2}{x+3} + 1 & | \cdot x(x+3) \text{ mit } x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\
\iff & 2x^2+5x-9 = 2x + x^2 + 3x \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 & | - x^2 - 5x + 9 \\
\iff & x^2 = 9 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 & \\
\iff & (x = 3 \vee x = -3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 & \\
\iff & x = 3 &
\end{array}$$

Angabe der Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

5.3 Beispiel
Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher für Wirtschaftswissenschaftler her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?
Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in € $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Es soll also $68B - (23B + 10000) = 57500$ gelten.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{array}{rrl} & 68B-(23B+10000)=57500 & \mid +10000 \\ \Longleftrightarrow & 45B=67500 & \mid :45 \\ \Longleftrightarrow & B=1500 & \end{array}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2+bx+c=0 \text{ mit } a\neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p=\dfrac{b}{a}$ und $q=\dfrac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2+px+q=0$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.
Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} & x^2+px+q=0 & \mid\text{quadratische Ergänzung} \\ \Longleftrightarrow & (x+\frac{p}{2})^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0 & \mid +\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q \\ \Longleftrightarrow & (x+\frac{p}{2})^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q & \end{array}$$

Es können nun verschiedene Fälle eintreten.
1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$
Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also $\mathbb{L}=\{\quad\}$.
2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geq 0$
Dann ist

$$\begin{array}{rc} & (x+\frac{p}{2})^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\ \Longleftrightarrow & x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\vee x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ \Longleftrightarrow & x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{array}$$

Die quadratische Gleichung hat also zwei verschiedene Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$, d. h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\}$ und eine (doppelte) Lösung, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$, d. h. die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{-\frac{p}{2}\}$.

5.4 Beispiel
Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2-3x+2=0$.
Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{1}{4}>0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{array}{rc} & x^2-3x+2=0 \\ \Longleftrightarrow & x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2} \\ \Longleftrightarrow & x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow & x=2\vee x=1 \end{array}$$

Somit: $\mathbb{L}=\{1,2\}$

5.5 Beispiel
Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - x + 2 = 0$.
Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\frac{7}{4} < 0$; es gibt also keine reelle Lösung.
Somit: $\mathbb{L} = \{\ \}$

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term faktorisieren (in Linearfaktoren zerlegen). Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$, so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Versuchen Sie einmal selbst, diese Formel nachzurechnen.

5.6 Beispiel
Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von $2x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$ in Linearfaktoren.
Wir bestimmen die Lösungen der Gleichung $2x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3} = 0$ bzw. äquivalent dazu der zugehörigen Normalform (Division der Gleichung durch 2) $x^2 + \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3} = 0$.
Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{aligned} & x^2 + \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{3} = 0 \\ \iff\quad & x = -\tfrac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + \tfrac{1}{3}} \\ \iff\quad & x = -\tfrac{1}{12} \pm \tfrac{7}{12} \\ \iff\quad & x = \tfrac{1}{2} \lor x = -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Somit: $\mathbb{L} = \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}\right\}$
Somit lässt sich der quadratische Term in Linearfaktoren zerlegen und es gilt

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 2(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3})\,.$$

Spezialfälle quadratischer Gleichungen
Ist in einer quadratischen Gleichung speziell $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.
Achtung: Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst "verloren gehen".

5.7 Beispiel
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x = 0 \quad & \iff \quad x(2x+3) = 0 \\ & \iff \quad x = 0 \lor 2x + 3 = 0 \\ & \iff \quad x = 0 \lor x = -\frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Somit: $\mathbb{L} = \left\{0, -\dfrac{3}{2}\right\}$

Manchmal lassen sich quadratische Gleichungen auch einfach durch Anwendung der binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,, \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

lösen.

Gleichungen der Form $x^n = a$
Wir betrachten zunächst einige typische Beispiele.

5.8 Beispiel

a) $x^4 = 16$

$$\begin{aligned} x^4 = 16 &\iff x = \pm\sqrt[4]{16} \\ &\iff x = -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{-2, 2\}$

b) $x^6 = -64$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, da bei einem geraden Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann.
$\mathbb{L} = \{\quad\}$

c) $x^3 = 27$

$$\begin{aligned} x^3 = 27 &\iff x = \sqrt[3]{27} \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{3\}$

d) $x^3 = -64$

$$\begin{aligned} x^3 = -64 &\iff x = -\sqrt[3]{64} \\ &\iff x = -4 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{-4\}$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:
n gerade und $a > 0$: $\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$
n gerade und $a = 0$: $\mathbb{L} = \{0\}$
n gerade und $a < 0$: $\mathbb{L} = \{\quad\}$
n ungerade und $a > 0$: $\mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}$
n ungerade und $a = 0$: $\mathbb{L} = \{0\}$
n ungerade und $a < 0$: $\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Gleichungen mit Beträgen

Beim Lösen von Gleichungen mit Beträgen ist es wichtig, genau auf die nötigen Fallunterscheidungen zu achten. Die Vorgehensweise soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden.

5.9 Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = 5\,.$$

Da

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{falls } x \geq \dfrac{2}{3} \\ 2-3x & \text{falls } x < \dfrac{2}{3} \end{cases},$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.
1. Fall: $x \geq \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |3x-2| = 5 &\iff 3x - 2 = 5 \\ &\iff 3x = 7 \\ &\iff x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = \{\dfrac{7}{3}\}$
2. Fall: $x < \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |3x-2| = 5 &\iff 2-3x = 5 \\ &\iff -3 = 3x \\ &\iff -1 = x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \{-1\}$
Die Lösungsmenge von $|3x-2| = 5$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\} .$$

5.10 Beispiel
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x-2| = |x-5| .$$

Da

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{falls } x \geq \dfrac{2}{3} \\ 2-3x & \text{falls } x < \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \text{und } |x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{falls } x \geq 5 \\ 5-x & \text{falls } x < 5 \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.
1. Fall: $x \geq 5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |3x-2| = |x-5| &\iff 3x-2 = x-5 \\ &\iff 2x = -3 \\ &\iff x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Da $-\frac{3}{2} \not\geq 5$ ist, gilt $\mathbb{L}_1 = \{\quad\}$.
2. Fall: $\frac{2}{3} \leq x < 5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |3x-2| = |x-5| &\iff 3x-2 = 5-x \\ &\iff 4x = 7 \\ &\iff x = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \left\{\dfrac{7}{4}\right\}$
3. Fall: $x < \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |3x-2| = |x-5| &\iff 2-3x = 5-x \\ &\iff -3 = 2x \\ &\iff x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
Die Lösungsmenge von $|3x-2| = |x-5|$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d . h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\} .$$

Lösen von Exponentialgleichungen

Die Lösung einer einfachen Exponentialgleichung

$$a^x = b \text{ mit } a, b > 0,\ a \neq 1$$

erhält man durch Anwenden des Logarithmus zur Basis a als

$$x = \log_a b\,,$$

da $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$.

5.11 Beispiel

Wir lösen die Gleichung $15^x = \dfrac{1}{225}$.

$$\begin{aligned} 15^x &= \tfrac{1}{225} && |\log_{15} \\ \iff \quad x &= \log_{15} \tfrac{1}{225} && |\text{Beachte } 225 = 15^2 \\ \iff \quad x &= \log_{15} 15^{-2} && |\text{Definition des Logarithmus} \\ \iff \quad x &= -2 \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2\}$

5.12 Beispiel

Wir lösen die Gleichung $2^x = 3$.

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 && |\log_2 \\ \iff \quad x &= \log_2 3 \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\log_2 3\}$. Will man mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die Lösung berechnen, so muss man $\log_2 3$ in einen Quotienten aus Logarithmen zur Basis 10 oder e umwandeln, d. h.

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58\,.$$

Einfache lineare Gleichungssysteme

Wir behandeln hier den Fall eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte.

5.13 Beispiel

In dem folgenden (einfachen) Modell bezeichne Y das Bruttoinlandsprodukt (BIP), C den Konsum und I_0 die fest vorgegebene Gesamtinvestition jeweils in Geldeinheiten.
Das Modell besteht nun in der Annahme, dass das BIP die Summe aus Konsum und Gesamtinvestition ist, und dass der Konsum eine lineare Funktion des BIP ist, d h.

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

mit festen Parametern $a > 0$ und $0 < b < 1$.
Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Gleichungssystem lösbar ist und was gegebenenfalls die Lösung ist.
Will man das Problem für verschiedene Parameterwerte behandeln, ist es ziemlich unpraktisch, für alle diese Parameterwerte das Gleichungssystem neu zu lösen. Sinnvoller ist es, im Falle der Lösbarkeit, die Lösungen für Y und C in Abängigkeit von den Parametern zu bestimmen.
Versuchen Sie einmal zu verifizieren, dass

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b} I_0\,,\ C = \frac{b}{1-b} I_0 + \frac{a}{1-b}$$

das Gleichungssystem löst.

Wir behandeln das Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte x_1 und x_2 allgemein. Sei also

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

Geometrisch sind dies die Gleichungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$. Wir suchen nun Wertepaare (x_1, x_2), die beide Gleichungen erfüllen, d.h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.
Dafür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
(geometrisch: Die Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.)

b) Es gibt unendlich viele Lösungen.
(geometrisch: Die Geraden sind gleich.)

c) Es gibt keine Lösung.
(geometrisch: Die Geraden sind parallel.)

Rechnerische Lösung: Es wird vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{ll} (1)\cdot a_{22}: & a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1 \\ (2)\cdot(-a_{12}): & -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \\ \hline (I) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1)\cdot(-a_{21}): & -a_{21}a_{11}x_1 - a_{21}a_{12}x_2 = -a_{21}b_1 \\ (2)\cdot a_{11}: & a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \\ \hline (II) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array}$$

Daraus siehr man nun:

a) (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.

b) Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt (determiniert) die Lösungsmöglichkeit von 1) und 2). Genauer gilt:

   i) Ist $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,,\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

   ii) Ist $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ und $a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$ und $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

   iii) Ist $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ und $(a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0$ oder $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

5.14 Bezeichnung

$$\begin{array}{c} \nearrow - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \searrow + \end{array}$$

heißt Determinante zweiter Ordnung.
Ebenso:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \text{ und } D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

D_{x_1} und D_{x_2} erhält man aus D, indem man die 1. bzw. 2. Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems (1) und (2) ersetzt. Damit gilt:

$$\begin{aligned} (I) D \cdot x_1 &= D_{x_1} \\ (II) D \cdot x_2 &= D_{x_2} \end{aligned}$$

und

a) $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \dfrac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \dfrac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\} ,$$

d. h. die Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

b) $D = 0$ *und* $D_{x_1} = 0$ *und* $D_{x_2} = 0$. Dann wird aus I) und II) $0 = 0$, also

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\} ,$$

d. h. die Geraden sind gleich; alle Punkte der Geraden sind Lösungen.

c) $D = 0$ *und* ($D_{x_1} \neq 0$ *oder* $D_{x_2} \neq 0$). Dann ist I) oder II) nicht erfüllbar, also:

$$\mathbb{L} = \{ \quad \} ,$$

d. h. die Geraden sind parallel.

5.15 Beispiel
Es soll das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

gelöst werden. Dazu berechnen wir die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \dfrac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Da $D \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 3 , \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = 1 .$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3, 1)\}$.

5.16 Bemerkung
Die oben hergeleitete Lösungsmethode heißt Cramersche *Regel*.

6 Lösen von Ungleichungen

Lösen linearer und quadratischer Ungleichungen

Beim Lösen von Ungleichungen werden sehr häufig Fehler gemacht. Dies läßt sich vermeiden, wenn man genau überlegt, wie man eine Ungleichung umformt und die gültigen Rechenregeln berücksichtigt.
Wir betrachten zunächst einige Beispiele, in denen einige der elementaren Rechenregeln anewendet werden.

6.1 Beispiel
Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $3x - 2 \geq 4 - x$ erfüllt ist.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} & 3x - 2 \geq 4 - x & \mid + 2 + x \\ \iff & 4x \geq 6 & \mid : 4 \\ \iff & x \geq \frac{3}{2} & \end{array}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left[\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

6.2 Beispiel
Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $-0.5x + 5 > -3$ erfüllt ist.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} & -0.5x + 5 > -3 & \mid - 5 \\ \iff & -0.5x > -8 & \mid \cdot (-2) \\ \iff & x < 16 & \end{array}$$

Somit ist $\mathbb{L} = (-\infty, 16)$.

Bei bestimmten Typen von Ungleichungen lassen sich die Lösungsmengen gut mit Hilfe von Vorzeichendiagrammen bestimmen. Das Vorgehen erläutern wir wieder mit Hilfe von Beispielen.

6.3 Beispiel
Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(x - 2)(x + 5) < 0$ gilt.
Wir bestimmen für jeden Faktor des Produktes auf der linken Seite die Intervalle mit positivem bzw. negativem Vorzeichen. Die Vorzeichen werden für die einzelnen Faktoren in ein Diagramm eingetragen. Ein kleiner Kreis im Diagramm bedeutet, dass der Faktor an dieser Stelle gleich Null ist. Die Vorzeichenverteilung des Gesamtproduktes erhält man mit der Überlegung, dass ein Produkt genau dann negativ ist, wenn eine ungerade Anzahl der Faktoren negativ und die anderen positiv sind. Außerdem ist ein Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.
Vorzeichendiagramm

	-6		**-5**		-3	-2	-1	0	1		**2**		3
$x-2$		$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$\circ$	$+$	
$x+5$		$-$	$\circ$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$		$+$	
$(x+5)(x-2)$		$+$	$\circ$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$\circ$	$+$	

Für die Lösugsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = (-5, 2)$.

6.4 Beispiel
Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ gilt.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Hier müssen wir zunächst $x^2 - 2x - 3$ faktorisieren.

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 2x - 3 = 0 & \iff & x = 1 \pm \sqrt{1 + 3} \\ & \iff & x = -1 \vee x = 3 \end{array}$$

Also ist $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, d. h.

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-3) < 0$$

Vorzeichendiagramm

	-2		-1		0		1		2		3		4
$x+1$		$-$	$\circ$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	$\circ$	$-$		$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$	

Für die Lösugsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = [-1, 3]$

6.5 Beispiel
Gesucht sind alle $p \in \mathbb{R}$, für die $\dfrac{2p-3}{p-1} \geq 3 - p$ gilt.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$
Wir formen die Ungleichung zunächst äquivalent um.

$$\begin{aligned} \frac{2p-3}{p-1} \geq 3 - p \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2p-3}{p-1} + p - 3 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2p-3+(p-3)(p-1)}{p-1} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{p^2-2p}{p-1} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{p(p-2)}{p-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Vorzeichendiagramm

	-1		0		1		2		3
p		$-$	$\circ$	$+$		$+$		$+$	
$p-2$		$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$	
$p-1$		$-$		$-$	$\circ$	$+$		$+$	
$\frac{p(p-2)}{p-1}$		$-$	$\circ$	$+$	$\star$	$-$	$\circ$	$+$	

Das Symbol $\star$ im Diagramm soll andeuten, dass der Wert nicht zur Definitionsmenge gehört. Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = [0, 1) \cup [2, \infty)$.

Lösen von Ungleichungen mit Beträgen

Auch beim Lösen von Ungleichungen mit Beträgen ist auf saubere Fallunterscheidungen zu achten. Die Vorgehensweise soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden.

6.6 Beispiel
Gesucht ist die Lösungsmenge der Unleichung

$$|x - 10| \leq \frac{1}{2}x \,.$$

Da

$$|x-10| = \begin{cases} x - 10 & \text{falls } x \geq 10 \\ 10 - x & \text{falls } x < 10 \end{cases} ,$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.
1. Fall: $x \geq 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x-10| \leq \frac{1}{2}x \quad &\Longleftrightarrow \quad x - 10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}x \leq 10 \\ &\Longleftrightarrow \quad x \leq 20 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [10, 20]$
2. Fall: $x < 10$. Dann gilt

$$|x-10| \le \frac{1}{2}x \iff -x+10 \le \frac{1}{2}x \iff 10 \le \frac{3}{2}x \iff \frac{20}{3} \le x$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = [\frac{20}{3}, 10)$
Die Lösungsmenge von $|x-10| \le \frac{1}{2}x$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, d . h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [\frac{20}{3}, 20]\,.$$

6.7 Beispiel
Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x+3| \le |2x-1| + 3\,.$$

Da

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \ge -3 \\ -x-3 & \text{falls } x < -3 \end{cases} \quad \text{und } |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } x \ge \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.
1. Fall: $x \ge \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$|x+3| \le |2x-1| + 3 \iff x+3 \le 2x-1+3 \iff 1 \le x$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [1, \infty)$
2. Fall: $-3 \le x < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$|x+3| \le |2x-1| + 3 \iff x+3 \le -2x+1+3 \iff 3x \le 1 \iff x \le \frac{1}{3}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = [-3, \frac{1}{3}]$
3. Fall: $x < -3$. Dann gilt

$$|x+3| \le |2x-1| + 3 \iff -x-3 \le -2x+1+3 \iff x \le 7$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = (-\infty, -3)$
Die Lösungsmenge von $|x+3| \le |2x-1|+3$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d . h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [1, \infty)\,.$$

Auch wenn wir an dieser Stelle zunächst nur wenige Regeln für das Lösen von Ungleichungen verwenden, sind an dieser Stelle auch zum späteren einfacheren Nachschlagen Rechenregeln für Ungleichungen in einer längeren Liste zusammengestellt. Man macht sich diese Regeln am besten plausibel, indem man verschiedene Zahlenwerte einsetzt.

Rechenregeln für Ungleichungen
Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
a > 0 \wedge b > 0 &\quad\Longrightarrow\quad a + b > 0 \\
a > 0 \wedge b > 0 &\quad\Longrightarrow\quad ab > 0 \\
a > 0 \wedge b < 0 &\quad\Longrightarrow\quad ab < 0 \\
a > b &\quad\Longleftrightarrow\quad a + c > b + c \\
a > b \wedge b > c &\quad\Longrightarrow\quad a > c \\
a > b \wedge c > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad ac > bc \\
a > b \wedge c < 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad ac < bc \\
a > b \wedge c > d &\quad\Longrightarrow\quad a + c > b + d \\
a > b \wedge c > d &\quad\Longrightarrow\quad ac > bd \\
ab > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \\
ab < 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)
\end{aligned}$$

Für $a, b, \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
a < b &\quad\Longleftrightarrow\quad a^n < b^n \\
a < b &\quad\Longleftrightarrow\quad a^{-n} > b^{-n}
\end{aligned}$$

Sinngemäß gelten entsprechende Regeln, wenn man die $<$ und $>$-Zeichen durch $\leq$ und $\geq$-Zeichen ersetzt. Versuchen Sie einmal selbst, solche Regeln aufzustellen.

7 Reelle Funktionen einer Variablen

7.1 Definition
Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Menge $\mathbb{D}_f$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$ zuordnet. $\mathbb{D}_f$ heißt Definitionsbereich von f, die Menge aller möglichen Funktionswerte $\mathbb{W}_f$ heißt Wertebereich von f.

Solche Zuornungen können auf sehr unterschiedliche Weise gegeben sein, z. B. durch Angabe einer Formel, Tabelle oder Graphik.

7.2 Bezeichnung
Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.
x heißt dann unabhängige Variable oder Argument von f und y abhängige Variable.

Ist eine Funktion durch eine Formel gegeben, so besteht der Definitionsbereich aus allen Werten, für die die Formel einen eindeutigen Wert ergibt, es sei denn, ein anderer Definitionsbereich ist explizit angegeben.

7.3 Beispiel
Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.
Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

7.4 Beispiel
Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt $\mathbb{D}_g = (-\infty, 3]$.

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.
Graphisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y-Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.
Lineare Funktionen
Häufig werden in den Wirtschaftswissenschaften als einfache Modelle lineare Modelle verwendet.
Eine Funktion

$$f : x \longmapsto y\,,\ f(x) = ax + b$$

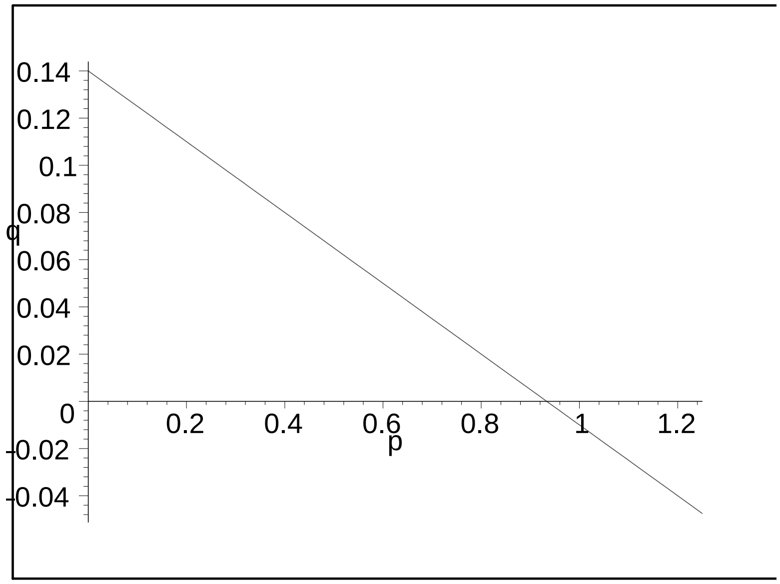
mit reellen Konstanten a und b, heißt lineare Funktion. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b.

7.5 Beispiel
Die geschätzte jährliche Nachfrage für Reis in Indien im Zeitraum 1949-1964 betrug

$$q = -0.15p + 0.14\,,$$

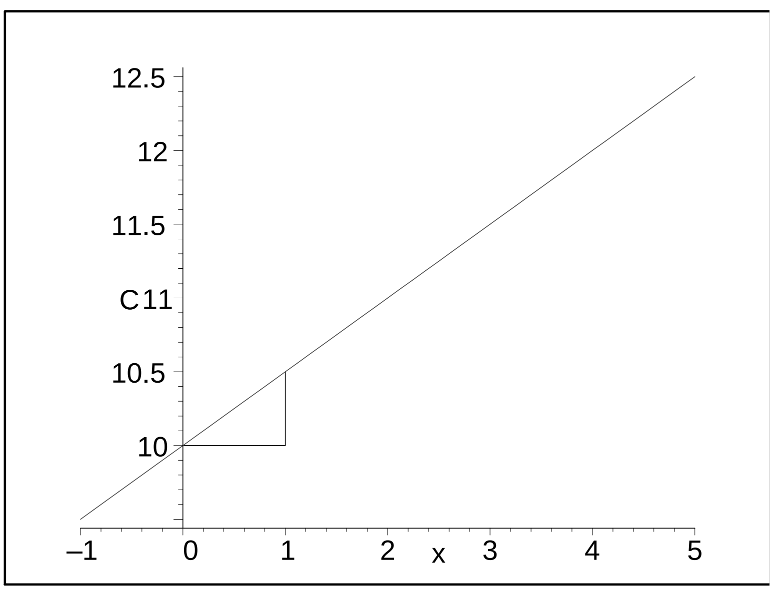
wobei p den Preis und q den Konsum pro Person bezeichnet. Bei steigendem Preis nimmt die Nachfrage ab.

An diesem Beispiel kann man auch sehen, dass Modelle (häufig) nur in bestimmten Bereichen verwertbar sind. Da negativer Konsum nicht möglich ist, ist das Modell sicher nicht brauchbar für $-0.15p + 0.14 < 0$, d. h. $p > \dfrac{0.14}{0.15} = \dfrac{14}{15}$.



7.6 Beispiel
Ein einfaches Modell einer Kostenfunktion ist die Darstellung der Gesamtkosten als Summe der Fixkosten und der als proportional zur produzierten Menge x angenommenen variablen Kosten, z. B.

$$C(x) = 0.5x + 10\,.$$



Steigt die Produktion um eine Einheit, so steigen die Kosten um 0.5 Einheiten.

Punkt-Steigungs-Formel einer Geraden
Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung a durch den Punkt (x_1, y_1) ist gegeben durch

$$y = ax + \underbrace{y_1 - ax_1}_{y\text{-Achs.abschn.}}\,.$$

Zwei-Punkte-Formel einer Geraden
Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte (x_1, y_1) und $x_2, y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ ist gegeben durch

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Steigung}} \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1}_{y\text{-Achs.abschn.}}$$

Parallelen zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen. Die zugehörigen Geradengleichungen lassen sich aber in der Form $x = c$ mit einer Konstanten c angeben.

Quadratische Funktionen
In vielen Modellen werden Funktionen verwendet, die zunächst auf einen Minimalwert fallen und dann ansteigen oder erst auf einen Maximalwert ansteigen und dann fallen.
Einfache Funktionen mit diesen Eigenschaften sind quadratische Funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit Konstanten } a, b, c, \text{ und } a \neq 0\,.$$

Der Graph der Funktion ist eine quadratische Parabel. Sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$ und nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist.
Zur Bestimmung der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) ist die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zu lösen (vgl. Kapitel 5). Eine quadratische Funktion besitzt am sogenannten Scheitelpunkt ein Minimum falls $a > 0$ und ein Maximum falls $a < 0$.
Zur Bestimmung des Maximums bzw. Minimums betrachten wir zunächst ein Beispiel.

7.7 Beispiel
Es sei $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.
Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Somit besitzt die Funktion ein Minimum.
Wir bringen die Funktionsgleichung mittels quadratischer Ergänzung auf eine andere Form.

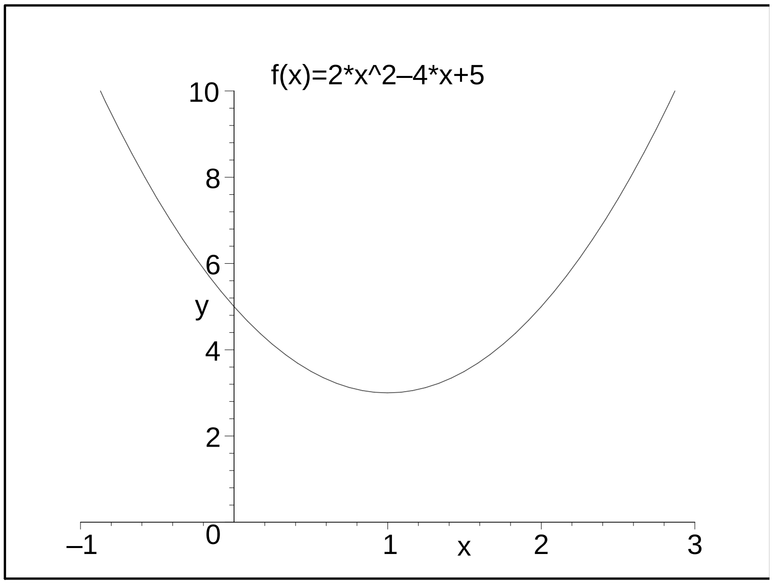
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 5 \\ &= 2 \cdot (x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

An dieser Darstellung (Scheitelpunktform) lässt sich nun ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ ein Minimum besitzt mit $f(1) = 3$. Der Scheitelpunkt ist $S(1, 3)$.

Die in dem Beispiel verwendete Methode zur Bestimmung des Scheitelpunktes lässt sich auch allgemein durchführen. Dazu bringt man die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die sogenannte Scheitelpunktform.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

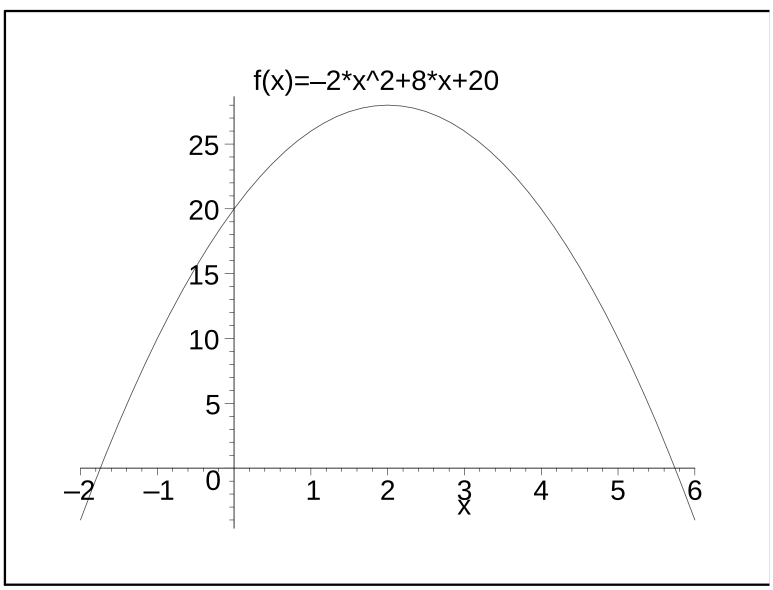
Da $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und a, c und $\frac{b^2}{4a}$ konstant sind, gilt:
Für $a > 0$ hat $f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Minimum $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$.
Für $a < 0$ hat $f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Maximum $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$.
Der Scheitelpunkt ist $S(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.



7.8 Beispiel
Wir bestimmen das Maximum von $f(x) = -2x^2 + 8x + 20$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 4x + 4) + 8 + 20 \\ &= -2 \cdot (x-2)^2 + 28 \end{aligned}$$

$f(x)$ besitzt also an der Stelle $x = 2$ ein Maximum $f(2) = 28$.



7.9 Beispiel
Ein Unternehmen hat für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten seines Produktes Gesamtkosten von

$$C = 2Q + 0.5Q^2 \,.$$

Der Preis pro Einheit ist beim Verkauf von Q Einheiten

$$P = 102 - 2Q\,.$$

Der Gesamterlös ist somit

$$R = PQ = (102 - 2Q)Q$$

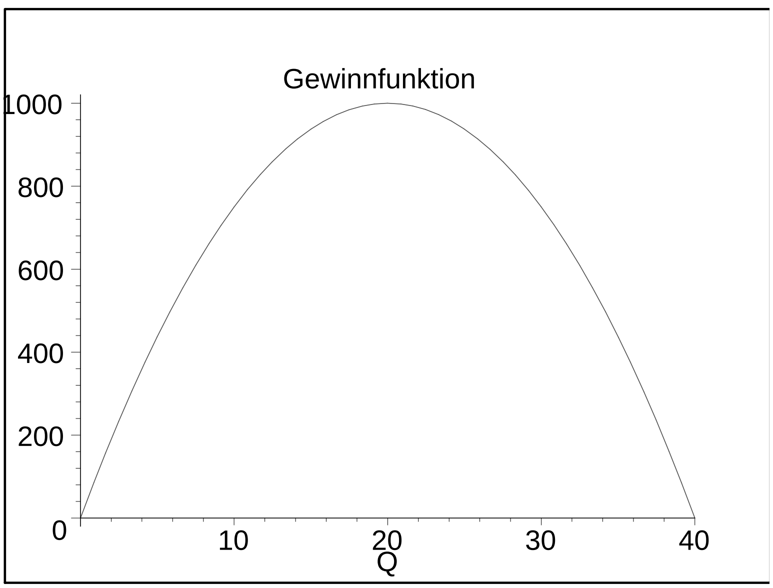
und der Gesamtgewinn (in Abhängigkeit von Q)

$$G(Q) = R - C = (102 - 2Q)Q - (2Q + 0.5Q^2)\,.$$

Wir bestimmen den Wert von Q, der den Gewinn maximiert und berechnen den maximalen Gewinn. Umformen in die Scheitelpunktform liefert

$$G(Q) = -2.5(Q - 20)^2) + 1000\,.$$

Der Gewinn wird also maximal für $Q = 20$ mit einem Gewinn von $G(20) = 1000$.



Normalparabel

Die einfachste quadratische Funktion ordnet jeder reellen Zahl ihre Quadratzahl x^2 zu, d. h.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\,, \quad f : x \longmapsto x^2\,.$$

Der Graph ist die nach oben geöffnete Normalparabel, $S(0,0)$ der Scheitelpunkt. Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse, d. h. x und $-x$ besitzen denselben Funktionswert.

Streckung bzw. Stauchung der Normalparabel

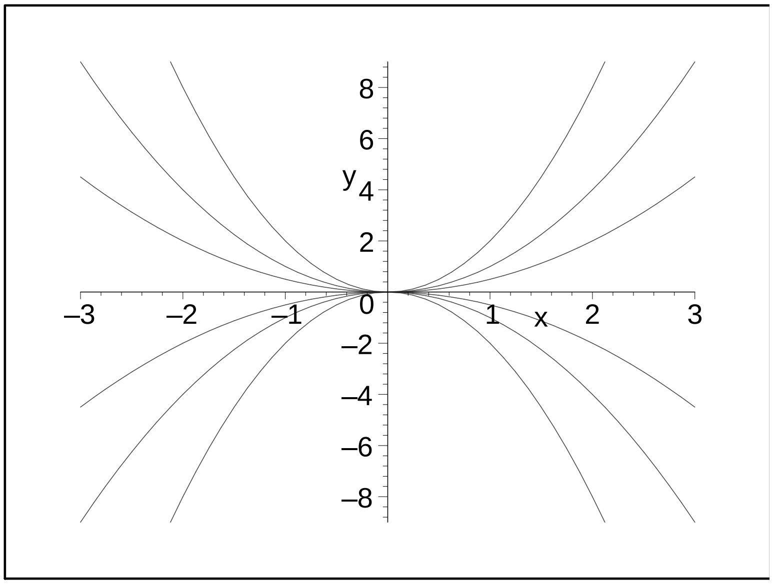
Wir betrachten nun etwas allgemeinere quadratische Funktionen der Form

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{W}_g\,, \quad g : x \longmapsto ax^2$$

mit einem Faktor $a \neq 0$. Dabei ist der Wertebereich

$$\mathbb{W}_g = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{falls } a > 0 \\ \mathbb{R}_- & \text{falls } a < 0 \end{cases}\,,$$

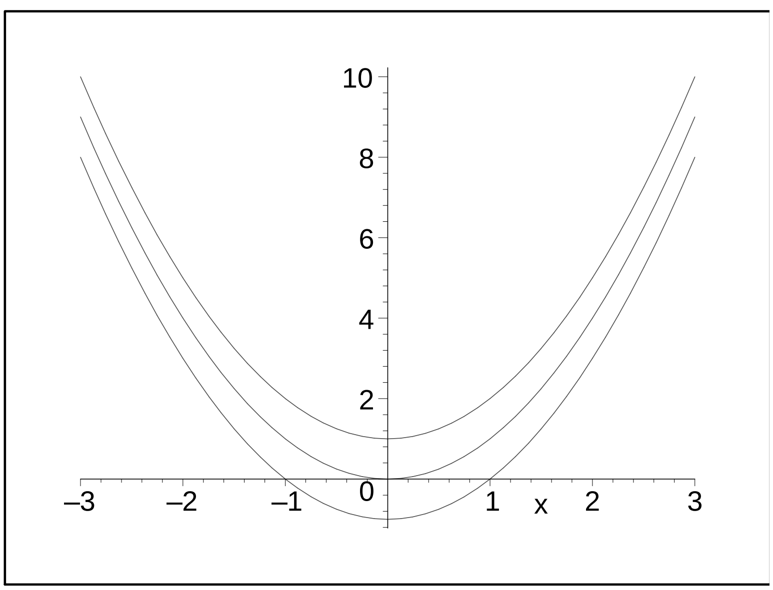
und der Scheitelpunkt ist unverändert $S(0,0)$. Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger, für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel. Ist $a < 0$, so ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.



Verschieben der Normalparabel
Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0 \text{ mit Wertebereich } \mathbb{W}_g = [y_0, \infty) \text{ und Scheitelpunkt } S(0, y_0)\,.$$

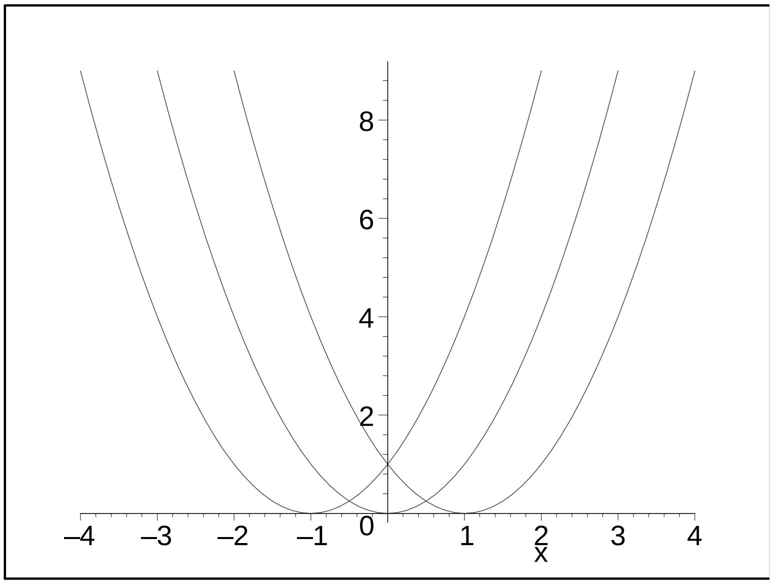
Für $y_0 > 0$ wir die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.



Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2 \text{ mit Wertebereich } \mathbb{W}_g = [0, \infty) \text{ und Scheitelpunkt } S(x_0, 0)\,.$$

Für $x_0 > 0$ wir die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.



Eine Kombination von Stauchung bzw. Streckung, Verschiebung um y_0 in y-Richtung und Verschiebung um x_0 in x-Richtung liefert allgemein

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \text{ (Scheitelpunktform).}$$

Durch Ausmultiplizieren und Umbenennen der Parameter erhält man

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (allgemeine Parabelform).}$$

Hat die Parabel an den Stellen x_1 und x_2 Schnittpunkte mit der x-Achse, so lässt sich der zugeörige Funktionsterm auch in der Form

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ (Nullstellenform)}$$

angeben.

7.10 Bemerkung
Man kann auch den Graphen jeder beliebigen anderen Funktion strecken bzw. stauchen, an der x-Achse spiegeln und in x und in y-Richtung verschieben. Die Veränderung im Funktionsterm ist dabei:

- Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $|a|$ mit zusätzlicher Spiegelung an der x-Achse, falls $a < 0$ entspricht der Multiplikation des Funktionsterms mit dem Faktor a.
- Verschiebung um y_0 in y-Richung entspricht der Addition der Konstanten y_0 zum Funktionsterm.
- Verschiebung um x_0 in x-Richung entspricht dem Ersetzen von x durch $x - x_0$ im Funktionsterm.

Polynome

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Funktionen, den Polynomen.

7.11 Definition
Eine Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit Konstanten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt Polynom vom Grad n. Die Konstanten a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 heißen Koeffizienten, a_n Leitkoeffizient oder führender Koeffizient. Weiter definiert man $P(x) = 0$ als das Nullpolynom.

7.12 Beispiel
$P(x) = -0.5x^3 + 2x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -0.5$.
$P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.
$f(x) = 5x^{-3} + x^{-2} + 2$ ist **kein** Polynom.

In vielen Problemstellungen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und die Lage der Nullstellen, d. h. die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ zu wissen.
Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen. Hat man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden, so lässt sich $P(x)$ auch schreiben als

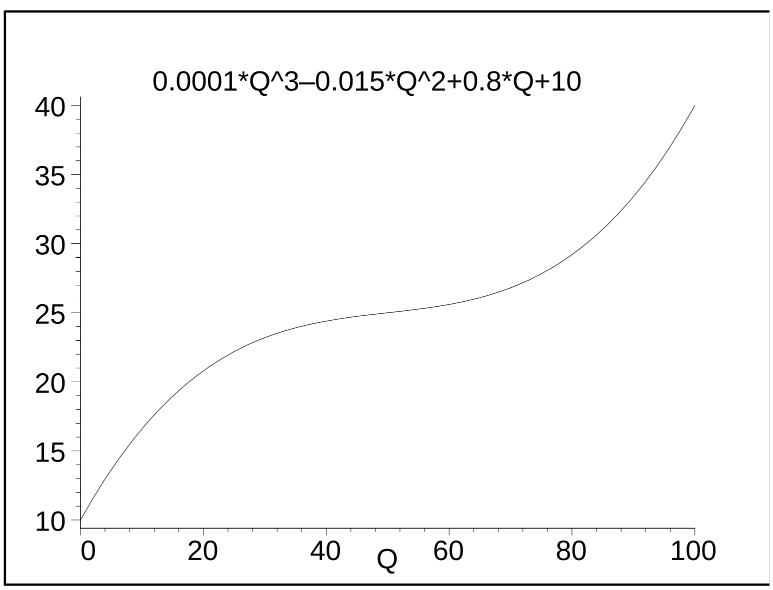
$$P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und einem Polynom $P_{n-1}(x)$, das einen Grad niedriger ist als $P(x)$. Mit $P_{n-1}(x)$ kann man dann prinzipiell wieder genauso verfahren.

7.13 Beispiel
Kostenfunktionen werden häufig durch kubische Polynome dagestellt, d. h.

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d\,, \text{ mit } a > 0, b < 0, c > 0, d > 0\,.$$

$C(Q)$ stellt die anfallenden Kosten für die Herstellung von Q Einheiten eines Produktes dar. Bei entsprechender Wahl der Koeffizienten kann damit z. B. folgender typischer Verlauf modelliert werden. Das Absolutglied stellt die Fixkosten dar. Wenn die Produktion steigt, steigen die Kosten zunächst schnell. Dann wird die Steigerungsrate bei den Kosten langsamer, da die Produktionseinrichtungen besser ausgenutzt werden können. Wird noch mehr produziert, steigen die Kosten wieder schneller, da z. B. Überstundenzuschläge bezahlt werden müssen, neue Anlagen gebaut werden müssen etc. Auch hier ist zu beachten, dass das Modell in der Regel nur in bestimmten Bereichen sinnvoll ist.



Für die ausführliche Untersuchung von Polynomen höheren als zweiten Grades und natürlich auch anderer Funktionen sind insbesondere die Methoden der Differentialrechnung wichtig, wie wir an späterer Stelle sehen werden.
Auch dort ist aber die Beantwortung folgender Fragen von Wichtigkeit.

- Wie kommt man (falls vorhanden) an Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ für ein Polynom n-ten Grades?
- Wie kommt man, wenn man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden hat an das Polynom $P_{n-1}(x)$, so dass $P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$ gilt?

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad 1 oder 2, so haben wir die Fragen bereits beantwortet. Für die Berechnung von Nullstellen von Polynomen dritten Grades gibt es zwar noch eine geschlossene Formel. Die ist aber ziemlich kompliziert. Für die Nullstellen von Polynomen höheren als dritten Grades gibt es keine geschlossene Formel mehr.
Für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten hat man aber die Möglichkeit, ganzzahlige Nullstellen zu ermitteln (falls es welche gibt). Dies und wie man mit Hilfe von Polynomdivision an die gewünschte Darstellung von $P(x)$ kommt, überlegen wir zunächst an einem Beispiel.

7.14 Beispiel
Sei $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (Polynom dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle x_1 besitzt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 + 6 = 0 \quad &\iff \quad x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = -6 \\ &\iff \quad x_1(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -6 \end{aligned}$$

Wenn x_1 ganzzahlig ist, dann ist auch $x_1^2 - 4x_1 + 1$ ganzzahlig, also muss x_1 (positiver oder negativer) Teiler von -6 sein.
Die Teiler von -6 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 4$, $P(-1) = 0$, also ist $x_1 = -1$ Nullstelle von $P(x)$.
Also ist $P(x) = (x + 1)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist, das mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} (x^3 & - & 4x^2 & + & x & + & 6 &) : (x+1) = x^2 - 5x + 6 \\ x^3 & + & x^2 & & & & & \\ \hline & & -5x^2 & + & x & + & 6 & \\ & & -5x^2 & - & 5x & & & \\ \hline & & & & 6x & + & 6 & \\ & & & & 6x & + & 6 & \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$$

Also gilt $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$. Die Nullstellen der quadratischen Funktion $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ lassen sich mit Hilfe der pq-Formel zu $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ berechnen, die natürlich auch (die restlichen) Nukkstellen von $P(x)$ sind.Wir erhalten damit die vollständig faktorisierte Darstellung

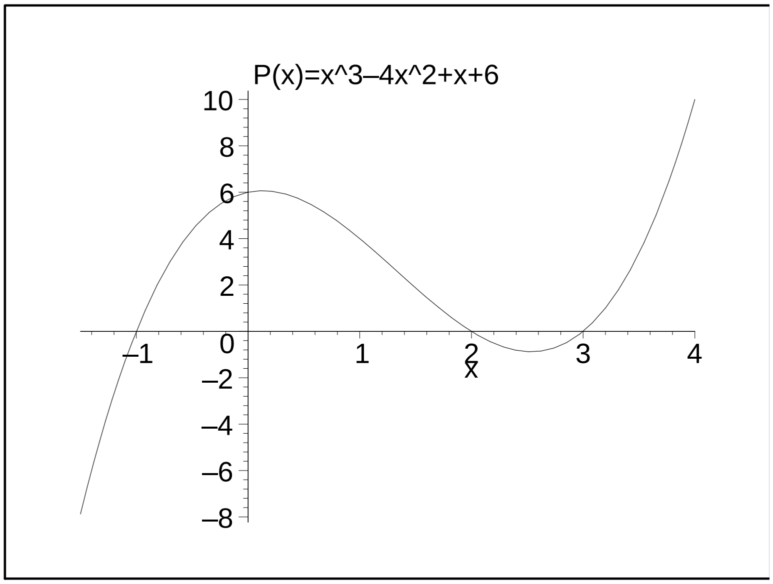
$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)\,.$$

Da ein Polynom zwischen seinen Nullstellen sein Vorzeichen nicht ändert, kann man aus dieser Darstellung z. B. mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positiv bzw. negativ Werte annimmt.

Allgemein gilt nun folgender Sachverhalt.

7.15 Satz
Sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann gilt: Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle besitzt, so ist diese Teiler des Absolutgliedes a_0.

Wir schauen uns nun noch ein paar passende Beispiele dazu an.



7.16 Beispiel
Sei $P(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12$ (Polynom fünften Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Die Teiler des Absolutgliedes 12 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 12$, $P(-1) = 24$, $P(2) = 0$ also ist $x_1 = 2$ Nullstelle von $P(x)$.
Also ist $P(x) = (x-2)P_4(x)$, wobei $P_4(x)$ ein Polynom vom Grad 4 ist, das mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
(x^5 & - & 3x^4 & - & 3x^3 & + & 9x^2 & - & 4x & + & 12 &) : (x-2) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 \\
x^5 & - & 2x^4 & & & & & & & & & \\
\cline{1-11}
 & & -x^4 & - & 3x^3 & + & 9x^2 & - & 4x & + & 12 & \\
 & & -x^4 & + & 2x^3 & & & & & & & \\
\cline{3-11}
 & & & & -5x^3 & + & 9x^2 & - & 4x & + & 12 & \\
 & & & & -5x^3 & + & 10x^2 & & & & & \\
\cline{5-11}
 & & & & & & -x^2 & - & 4x & + & 12 & \\
 & & & & & & -x^2 & + & 2x & & & \\
\cline{7-11}
 & & & & & & & & -6x & + & 12 & \\
 & & & & & & & & -6x & + & 12 & \\
\cline{9-11}
 & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Also ist
$$P(x) = (x-2)P_4(x) \text{ mit } P_4(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6\,.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -6 von $P_4(x)$ sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, wobei ± 1 nicht mehr probiert werden müssen.
$P_4(2) = -20$, $P_4(-2) = 0$ also ist $x_2 = -2$ Nullstelle von $P_4(x)$.
Also ist $P_4(x) = (x+2)P_3(x)$ bzw. $P(x) = (x-2)(x+2)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist,

das wieder mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
(x^4 & - & x^3 & - & 5x^2 & - & x & - & 6 &) : (x+2) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
x^4 & + & 2x^2 & & & & & & & \\
\hline
 & & -3x^3 & - & 5x^2 & - & x & - & 6 & \\
 & & -3x^3 & - & 6x^2 & & & & & \\
\hline
 & & & & x^2 & - & x & - & 6 & \\
 & & & & x^2 & + & 2x & & & \\
\hline
 & & & & & & -3x & - & 6 & \\
 & & & & & & -3x & - & 6 & \\
\hline
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)P_3(x) \text{ mit } P_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3\,.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -3 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, wobei ± 1 und 2 nicht mehr probiert werden müssen.
$P_3(-2) = -25$, $P_3(3) = 0$ also ist $x_3 = 3$ Nullstelle von $P_3(x)$.
Also ist $P_3(x) = (x-3)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist, das wieder mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann.

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
(x^3 & - & 3x^2 & + & x & - & 3 &) : (x-3) = x^2 + 1 \\
x^3 & - & 3x^2 & & & & & \\
\hline
 & & & & x & - & 3 & \\
 & & & & x & - & 3 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)P_2(x) \text{ mit } P_2(x) = x^2 + 1\,.$$

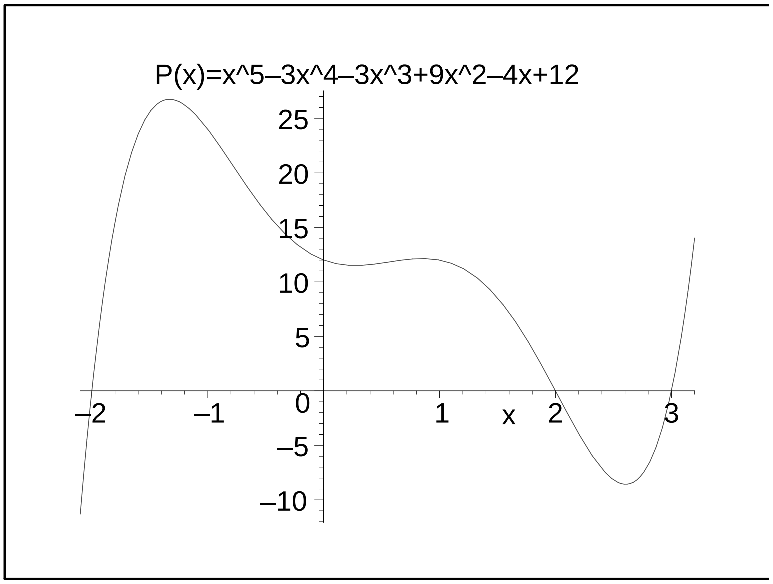
Da $P_2(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ somit

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x^2+1)\,.$$

Die reellen Nullstellen sind $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$. Auch hier kann man aus dieser Darstellung wieder mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positive bzw. negative Werte annimmt.

7.17 Beispiel
Sei $P(x) = x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025$ (Polynom vierten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Die Teiler des Absolutgliedes 3025 sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 25, \pm 55, \pm 121, \pm 275, \pm 605, \pm 3025$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 1600$, $P(-1) = 5184$, $P(5) = 0$ also ist $x_1 = 5$ Nullstelle von $P(x)$.
Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist, das mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
(x^4 & - & 32x^3 & + & 366x^2 & - & 1760x & + & 3025 &) : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x - 605 \\
x^4 & - & 5x^3 & & & & & & & \\
\hline
 & & -27x^3 & + & 366x^2 & - & 1760x & + & 3025 & \\
 & & -27x^3 & + & 135x^2 & & & & & \\
\hline
 & & & & 231x^2 & - & 1760x & + & 3025 & \\
 & & & & 231x^2 & - & 1155x & & & \\
\hline
 & & & & & & -605x & + & 3025 & \\
 & & & & & & -605x & + & 3025 & \\
\hline
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$



Also ist

$$P(x) = (x-5)P_3(x) \text{ mit } P_3(x) = x^3 - 27x^2 + 231x - 605\,.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei ± 1 nicht mehr probiert werden müssen.
$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).
Also ist $P_3(x) = (x-5)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist, das wieder mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^3 & - & 27x^2 & + & 231x & - & 605 &) : (x-5) = x^2 - 22x + 121 \\
x^3 & - & 5x^2 & & & & & \\
\hline
 & & -22x^2 & + & 231x & - & 605 & \\
 & & -22x^2 & + & 110x & & & \\
\hline
 & & & & 121x & - & 605 & \\
 & & & & 121x & - & 605 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Also ist

$$P(x) = (x-5)^2 P_2(x) \text{ mit } P_2(x) = x^2 - 22x + 121 = (x-11)^2 \text{ (binomische Formel).}$$

Die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ ist somit

$$P(x) = (x-5)^2(x-11)^2\,.$$

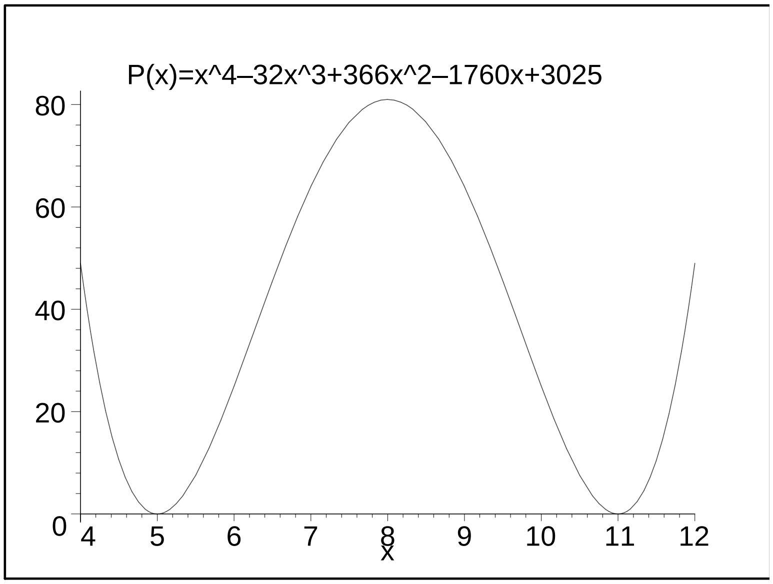
Die doppelten reellen Nullstellen sind $x_1 = 5$ und $x_2 = 11$. Da Quadrate stets nichtnegativ sind, können wir aus dieser Darstellung ablesen, dass $P(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Auswertung von Polynomen

Die Auswertung eines Polynoms $p(x)$ in der Darstellung $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ an einer festen Stelle x_0 erfordert ziemlich viele Rechenoperationen ($2n-1$ Multiplikationen und n Additionen). Verwendet man statt dessen die sogenannte Horner-Darstellung

$$P(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0\,,$$

so benötigt man nur n Multiplikationen



7.18 Beispiel
Wir leiten für $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$ die Horner-Darstellung her.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12 \\ &= [2x^2 + 4x - 10]x - 12 \\ &= [(2x + 4)x - 10]x - 12 \end{aligned}$$

Will man das Polynom nun an einer festen Stelle x_0 auswerten, so rechnet man "von innen nach außen", was sich schematisch folgendermaßen darstellen lässt.
Auswertung an den Stellen $x = 1$ und $x = -2$.

a_k	2	4	-10	-12	
$x = 1$		2	6	-4	
	2	6	-4	-16	$= P(1)$

a_k	2	4	-10	-12	
$x = -2$		-4	0	20	
	2	0	-10	8	$= P(-2)$

7.19 Beispiel
Wir leiten für $P(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 9x + 7$ die Horner-Darstellung her.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + x^3 - 9x^2 + 9x + 7 \\ &= \{x^3 + x^2 - 9x + 9\}x + 7 \\ &= \{[x^2 + x - 9]x + 9\}x + 7 \\ &= \{[(x + 1)x - 9]x + 9\}x + 7 \end{aligned}$$

Auswertung an der Stelle $x = 2$ mit dem Horner-Schema.

a_k	1	1	-9	9	7	
$x = 2$		2	6	-6	6	
	1	3	-3	3	13	$= P(2)$

Hat man mit dem Horner-Schema eine Nullstelle eines Polynoms gefunden, so lässt sich aus dem Horner-Schema noch mehr ablesen.

7.20 Satz
Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n mit $P(x_0) = 0$, $P(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x)$. Dann stehen die Koeffizienten von $P_{n-1}(x)$ in der Ergebniszeile des Horner-Schemas für $P(x_0)$.

7.21 Beispiel
Wir betrachten noch einmal das Polynom $P(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12$.
Horner-Schema für $P(x)$ an der Stelle $x_1 = 2$:

	1	-3	-3	9	-4	12	
$x_1 = 2$		2	-2	-10	-2	-12	
	1	-1	-5	-1	-6	0	$= P(2)$

Mit Hilfe von Polynomdivision hatten wir berechnet, dass

$$P(x) = (x - 2)P_4(x) \text{ mit } P_4(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6\,.$$

Wir sehen, dass die Koeffizienten von $P_4(x)$ genau in der letzten Zeile des Horner-Schemas stehen.
Horner-Schema für $P_4(x)$ an der Stelle $x_2 = -2$:

	1	-1	-5	-1	-6	
$x_2 = -2$		-2	6	-2	6	
	1	-3	1	-3	0	$= P_4(-2)$

Mit Hilfe von Polynomdivision hatten wir berechnet, dass

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)P_3(x) \text{ mit } P_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3\,.$$

Auch hier sehen wir, dass die Koeffizienten von $P_3(x)$ genau in der letzten Zeile des Horner-Schemas stehen.
Horner-Schema für $P_3(x)$ an der Stelle $x_3 = 3$:

	1	-3	1	-3	
$x_3 = 3$		3	0	3	6
	1	0	1	0	$= P_3(3)$

Ebenfalls mit Polynomdivision hatten wir ermittelt

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)P_2(x) \text{ mit } P_2(x) = x^2 + 1\,.$$

Die Koeffizienten von $P_2(x)$ stehen ebenfalls wieder in der letzten Zeile des Horner-Schemas. Da $P_2(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ somit

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)\,.$$

Rationale Funktionen

Aus den Polynomen lassen sich nun durch Quotientenbildung die Rationalen Funktionen bilden.

7.22 Definition
Seien

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

und

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Polynome vom Grad n bzw. m, wobei $Q(x)$ nicht das Nullpolynom sein darf. Dann heißt

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rationale Funktion mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\} \; .$$

Üblicherweise bringt man rationale Funktionen auf eine gekürzte Form, indem man die Faktorisierungen von $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmt und gemeinsame Faktoren kürzt.
Liegt die rationale Funktion $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ in gekürzter Form vor, dann sind die Nullstellen von f die Nullstellen von P und die Polstellen von f die Nullstellen von Q.

7.23 Beispiel
Die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Kürzen liefert

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. $g(x)$ besitzt Nullstellen für $x = -1$ und $x = 2$ und eine Polstelle für $x = 1$.
Für $x \in \mathbb{D}_f$ gilt $f(x) = g(x)$.

7.24 Satz
Ist der Grad des n Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad m des Nennerpolynoms, so lässt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

wobei $N(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ und $R(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 1$ bezeichnet.

Die Polynome $N(x)$ und $R(x)$ erhält man durch Polynomdivision.
Für große Werte von $|x|$ ist $f(x) \approx N(x)$; $N(x)$ heißt Asymptote.

7.25 Beispiel
Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} \; .$$

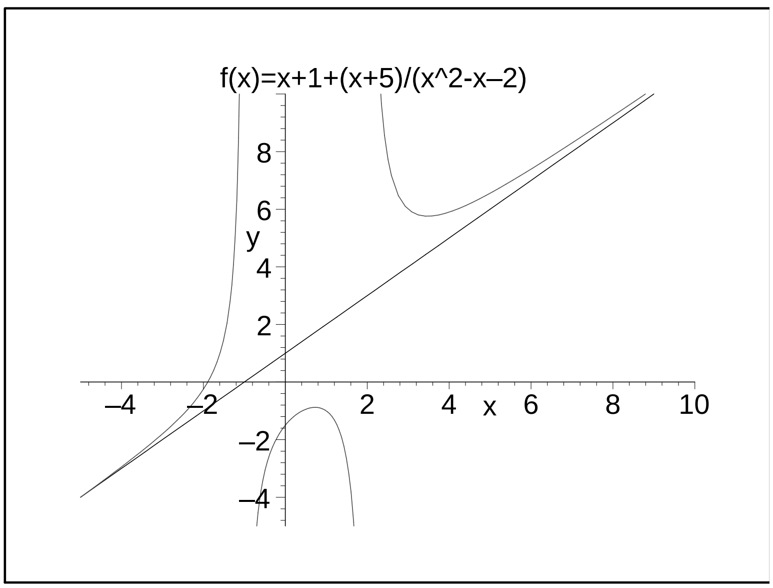
Polynomdivision (mit Rest) liefert

$$\begin{array}{ccccccc} (x^3 & & & - & 2x & + & 3) \\ x^3 & - & x^2 & - & 2x & & \\ \hline & & x^2 & & & + & 3 \\ & & x^2 & - & x & - & 2 \\ \cline{3-7} & & & & x & + & 5 \end{array} \quad : (x^2 - x - 2) = x + 1 + \tfrac{x+5}{x^2-x-2}$$

d. h.

$$f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2 - x - 2}$$

$N(x) = x + 1$ ist Asymptote von $f(x)$.


f(x)=x+1+(x+5)/(x^2-x–2)
8
6
y
4
2
–4
–2
2
4
x
6
8
10
–2
–4