Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	`stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`
www:	`http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Reelle Funktionen in einer Variablen

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Polynome

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Funktionen, den Polynomen.

Definition

Eine Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit Konstanten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* vom Grad n. Die Konstanten a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 heißen Koeffizienten, a_n Leitkoeffizient oder führender Koeffizient. Weiter definiert man $P(x) = 0$ als das Nullpolynom.

Beispiel

- $P(x) = -0.5x^3 + 2x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -0.5$.
- $P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.
- $f(x) = 5x^{-3} + x^{-2} + 2$ ist *kein Polynom*.

Reelle Funktionen
Polynome
Rationale Funktionen
Kurvenscharen

Beispiel

- $P(x) = -0.5x^3 + 2x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -0.5$.
- $P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.
- $f(x) = 5x^{-3} + x^{-2} + 2$ ist *kein Polynom*.

Beispiel

- $P(x) = -0.5x^3 + 2x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -0.5.$
- $P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.
- $f(x) = 5x^{-3} + x^{-2} + 2$ ist *kein Polynom*.

Nullstellen von Polynomen

In vielen Problemstellungen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und die Lage der Nullstellen, d. h. die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ zu wissen.

Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Hat man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden, so lässt sich $P(x)$ auch schreiben als

$$P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und einem Polynom $P_{n-1}(x)$, das einen Grad niedriger ist als $P(x)$.

Mit $P_{n-1}(x)$ kann man wieder genauso verfahren.

Nullstellen von Polynomen

In vielen Problemstellungen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und die Lage der Nullstellen, d. h. die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ zu wissen.

Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Hat man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden, so lässt sich $P(x)$ auch schreiben als

$$P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und einem Polynom $P_{n-1}(x)$, das einen Grad niedriger ist als $P(x)$.

Mit $P_{n-1}(x)$ kann man wieder genauso verfahren.

Nullstellen von Polynomen

In vielen Problemstellungen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und die Lage der Nullstellen, d. h. die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ zu wissen.

Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

Hat man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden, so lässt sich $P(x)$ auch schreiben als

$$P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$$

mit dem Linearfaktor $(x - x_1)$ und einem Polynom $P_{n-1}(x)$, das einen Grad niedriger ist als $P(x)$.

Mit $P_{n-1}(x)$ kann man wieder genauso verfahren.

Beispiel

Kostenfunktionen werden häufig durch kubische Polynome dagestellt, d. h.

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d\,,\ \text{mit } a > 0, b < 0, c > 0, d > 0\,.$$

$C(Q)$ stellt die anfallenden Kosten für die Herstellung von Q Einheiten eines Produktes dar.

- Das Absolutglied stellt die Fixkosten dar.
- Wenn die Produktion steigt, steigen die Kosten zunächst schnell
- Dann wird die Steigerungsrate bei den Kosten langsamer, da die Produktionseinrichtungen besser ausgenutzt werden können.
- Wird noch mehr produziert, steigen die Kosten wieder schneller, da z. B. Überstundenzuschläge bezahlt und neue Anlagen gebaut werden müssen etc.

Beispiel

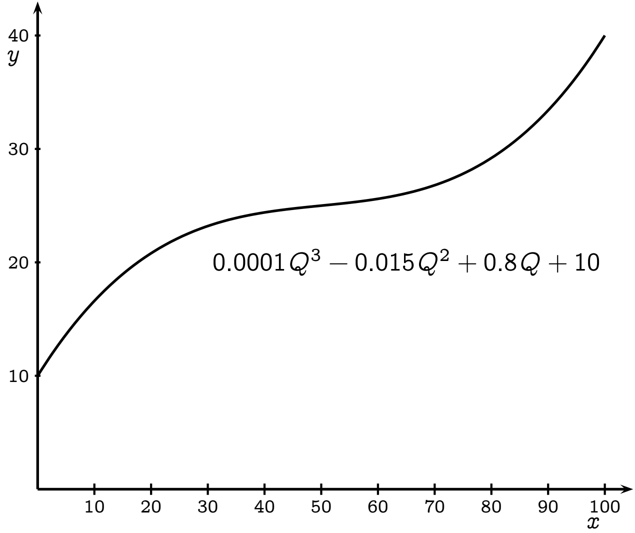
Kostenfunktionen werden häufig durch kubische Polynome dagestellt, d. h.

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d\,,\ \text{mit } a > 0, b < 0, c > 0, d > 0\,.$$

$C(Q)$ stellt die anfallenden Kosten für die Herstellung von Q Einheiten eines Produktes dar.

- Das Absolutglied stellt die Fixkosten dar.
- Wenn die Produktion steigt, steigen die Kosten zunächst schnell
- Dann wird die Steigerungsrate bei den Kosten langsamer, da die Produktionseinrichtungen besser ausgenutzt werden können.
- Wird noch mehr produziert, steigen die Kosten wieder schneller, da z. B. Überstundenzuschläge bezahlt und neue Anlagen gebaut werden müssen etc.

Beispiel



Für die ausführliche Untersuchung von Polynomen höheren als zweiten Grades ist man insbesondere an den folgenden Fragen interessiert:

- Wie kann man (falls vorhanden) Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ für ein Polynom n-ten Grades berechnen?
- Wie kann man, wenn man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden hat, das Polynom $P_{n-1}(x)$ bestimmen, so dass $P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$ gilt?

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad 1 oder 2, so haben wir die Fragen bereits beantwortet. Für die Berechnung von Nullstellen von Polynomen dritten Grades gibt es zwar noch eine geschlossene Formel. Die ist aber ziemlich kompliziert. Für die Nullstellen von Polynomen höheren als dritten Grades gibt es keine geschlossene Formel mehr.

Für die ausführliche Untersuchung von Polynomen höheren als zweiten Grades ist man insbesondere an den folgenden Fragen interessiert:

- Wie kann man (falls vorhanden) Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ für ein Polynom n-ten Grades berechnen?
- Wie kann man, wenn man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden hat, das Polynom $P_{n-1}(x)$ bestimmen, so dass $P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$ gilt?

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad 1 oder 2, so haben wir die Fragen bereits beantwortet. Für die Berechnung von Nullstellen von Polynomen dritten Grades gibt es zwar noch eine geschlossene Formel. Die ist aber ziemlich kompliziert. Für die Nullstellen von Polynomen höheren als dritten Grades gibt es keine geschlossene Formel mehr.

Beispiel (Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)

Sei $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (Polynom dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).

Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle x_1 besitzt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 + 6 = 0 \iff & \quad x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = -6 \\ \iff & x_1(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -6 \end{aligned}$$

Wenn x_1 ganzzahlig ist, dann ist auch $x_1^2 - 4x_1 + 1$ ganzzahlig, also muss x_1 (positiver oder negativer) Teiler von -6 sein. Die Teiler von -6 sind: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.

Beispiel (Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)

Sei $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (Polynom dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).

Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle x_1 besitzt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 + 6 = 0 \iff & \quad x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = -6 \\ \iff & x_1(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -6 \end{aligned}$$

Wenn x_1 ganzzahlig ist, dann ist auch $x_1^2 - 4x_1 + 1$ ganzzahlig, also muss x_1 (positiver oder negativer) Teiler von -6 sein. Die Teiler von -6 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.

Beispiel (Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)

Sei $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (Polynom dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).

Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle x_1 besitzt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 + 6 = 0 \iff & \quad x_1^3 - 4x_1^2 + x_1 = -6 \\ \iff & x_1(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -6 \end{aligned}$$

Wenn x_1 ganzzahlig ist, dann ist auch $x_1^2 - 4x_1 + 1$ ganzzahlig, also muss x_1 (positiver oder negativer) Teiler von -6 sein. Die Teiler von -6 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.

Beispiel (Fortsetzung)

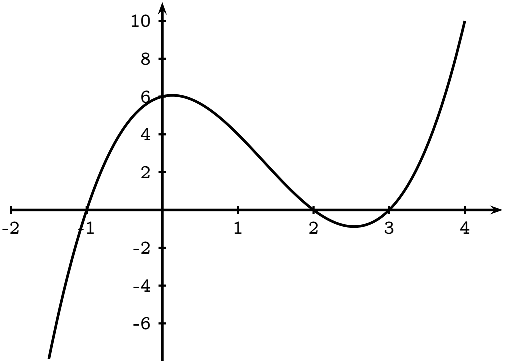
$P(1) = 4$, $P(-1) = 0$, also ist $x_1 = -1$ Nullstelle von $P(x)$.
$\Rightarrow P(x) = (x+1)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x+1) = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\quad -5x^2 + x + 6 \\
\quad \underline{-5x^2 - 5x} \\
\qquad 6x + 6 \\
\qquad \underline{6x + 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also gilt $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$. Die Nullstellen der quadratischen Funktion $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ lassen sich mit Hilfe der pq-Formel zu $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ berechnen; die restlichen Nullstellen von $P(x)$. Wir erhalten damit die vollständig faktorisierte Darstellung

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-3).$$



Allgemein gilt nun folgender Sachverhalt.

Satz

Sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann gilt: Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle besitzt, so ist diese Teiler des Absolutgliedes a_0.

Beispiel

Sei $P(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12$ (Polynom fünften Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Die Teiler des Absolutgliedes 12 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.
Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 12$, $P(-1) = 24$, $P(2) = 0$ also ist $x_1 = 2$ Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-2)P_4(x)$, wobei $P_4(x)$ ein Polynom vom Grad 4 ist.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & -3x^4 & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +12) & : (x-2) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 \\
x^5 & -2x^4 & & & & & \\
\hline
 & -x^4 & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +12 & \\
 & -x^4 & +\ 2x^3 & & & & \\
\cline{2-6}
 & & -5x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +12 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -x^2 & -\ 4x & +12 & \\
 & & & -x^2 & +\ 2x & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -6x & +12 & \\
 & & & & -6x & +12 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 & \\
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-2)\underbrace{(x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6)}_{P_4(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -6 von $P_4(x)$ sind:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.

$$P_4(2) = -20$$

$P_4(-2) = 0$ also ist $x_2 = -2$ Nullstelle von $P_4(x)$.

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-2)\underbrace{(x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6)}_{P_4(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -6 von $P_4(x)$ sind:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.

$$P_4(2) = -20$$

$$P_4(-2) = 0 \qquad \text{also ist } x_2 = -2 \text{ Nullstelle von } P_4(x).$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P_4(x) = (x+2)P_3(x)$ bzw.
$P(x) = (x-2)(x+2)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist,

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6) : (x+2) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
\underline{x^4 + 2x^2} \\
\qquad -3x^3 - 5x^2 - x - 6 \\
\qquad \underline{-3x^3 - 6x^2} \\
\qquad\qquad x^2 - x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad -3x - 6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)\underbrace{(x^3 - 3x^2 + x - 3)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -3 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$.
$P_3(-2) = -25$, $P_3(3) = 0$ also ist $x_3 = 3$ Nullstelle von $P_3(x)$.
Also ist $P_3(x) = (x-3)P_2(x)$ bzw.
$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x-3) = x^2 + 1 \\
\underline{x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\ 0
\end{array}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

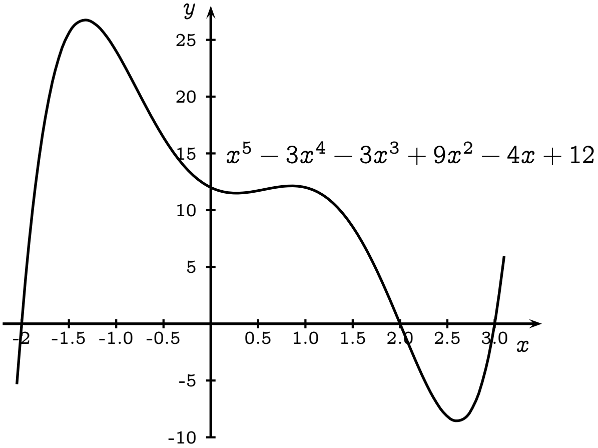
$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)\underbrace{(x^2+1)}_{P_2(x)}.$$

Da $P_2(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ somit

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x^2+1).$$

Die reellen Nullstellen sind $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$. Auch hier kann man aus dieser Darstellung wieder mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positive bzw. negative Werte annimmt.

Beispiel (Fortsetzung)



Beispiel

$$P(x) = x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025$$

Die Teiler des Absolutgliedes 3025 sind:
$\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 25, \pm 55, \pm 121, \pm 275, \pm 605, \pm 3025$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 1600$, $P(-1) = 5184$, $P(5) = 0$ also ist $x_1 = 5$ Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel

$$P(x) = x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025$$

Die Teiler des Absolutgliedes 3025 sind:
$\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 25, \pm 55, \pm 121, \pm 275, \pm 605, \pm 3025$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.

$P(1) = 1600$, $P(-1) = 5184$, $P(5) = 0$ also ist $x_1 = 5$ Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel

$$P(x) = x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025$$

Die Teiler des Absolutgliedes 3025 sind:
$\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 25, \pm 55, \pm 121, \pm 275, \pm 605, \pm 3025$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 1600$, $P(-1) = 5184$, $P(5) = 0$ also ist $x_1 = 5$ Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) =$$

$$\begin{array}{l}
x^4 - 5x^3 \\
\hline
\quad -27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
\quad -27x^3 + 135x^2 \\
\hline
\qquad 231x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad 231x^2 - 1155x \\
\hline
\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) = x^3 \\
\;\; x^4 - 5x^3 \\
\hline
\qquad -27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad -27x^3 + 135x^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 231x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad\qquad\qquad 231x^2 - 1155x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^4 - 32x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025) & : (x-5) = x^3 \\
x^4 - 5x^3 & & & & \\
\hline
-27x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025 & \\
-27x^3 & +135x^2 & & & \\
\hline
 & 231x^2 & -1760x & +3025 & \\
 & 231x^2 & -1155x & & \\
\hline
 & & -605x & +3025 & \\
 & & -605x & +3025 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) = x^3 - 27x^2 \\
\quad x^4 - 5x^3 \\
\hline
\qquad -27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad -27x^3 + 135x^2 \\
\hline
\qquad\qquad 231x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad\qquad 231x^2 - 1155x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) = x^3 - 27x^2 \\
\underline{x^4 - 5x^3} \\
\quad -27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
\quad \underline{-27x^3 + 135x^2} \\
\qquad\qquad 231x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad\qquad \underline{231x^2 - 1155x} \\
\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-605x + 3025} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & -32x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025) & : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x \\
x^4 & -5x^3 & & & & \\
\hline
 & -27x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025 & \\
 & -27x^3 & +135x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 231x^2 & -1760x & +3025 & \\
 & & 231x^2 & -1155x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -605x & +3025 & \\
 & & & -605x & +3025 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x \\
\;\; x^4 - 5x^3 \\
\hline
\qquad -27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad -27x^3 + 135x^2 \\
\hline
\qquad\qquad 231x^2 - 1760x + 3025 \\
\qquad\qquad 231x^2 - 1155x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\qquad\qquad\qquad -605x + 3025 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & -32x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025) & : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x - 605 \\
x^4 & -5x^3 & & & & \\
\hline
 & -27x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025 & \\
 & -27x^3 & +135x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 231x^2 & -1760x & +3025 & \\
 & & 231x^2 & -1155x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -605x & +3025 & \\
 & & & -605x & +3025 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist $P(x) = (x-5)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$(x^4 - 32x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025) : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x - 605$$

$$\begin{array}{r}
x^4 - 5x^3 \phantom{{}+366x^2 - 1760x + 3025} \\
\hline
-27x^3 + 366x^2 - 1760x + 3025 \\
-27x^3 + 135x^2 \phantom{{}- 1760x + 3025} \\
\hline
231x^2 - 1760x + 3025 \\
231x^2 - 1155x \phantom{{}+ 3025} \\
\hline
-605x + 3025 \\
-605x + 3025 \\
\hline
0
\end{array}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-5)\underbrace{\left(x^3 - 27x^2 + 231x - 605\right)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.
$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).
$\Rightarrow$ $P_3(x) = (x-5)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-5)\underbrace{\left(x^3 - 27x^2 + 231x - 605\right)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind:
$\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.

$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).

$\Rightarrow$ $P_3(x) = (x-5)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-5)\underbrace{\left(x^3 - 27x^2 + 231x - 605\right)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.
$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).
$\Rightarrow$ $P_3(x) = (x-5)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

Beispiel (Fortsetzung)

Also ist

$$P(x) = (x-5)\underbrace{\left(x^3 - 27x^2 + 231x - 605\right)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.
$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).
$\Rightarrow$ $P_3(x) = (x-5)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

Beispiel (Fortsetzung)

$$(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) =$$

$$\begin{array}{r}
x^3 - 5x^2 \\
\hline
-22x^2 + 231x - 605 \\
-22x^2 + 110x \phantom{{}-605} \\
\hline
121x - 605 \\
121x - 605 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) = x^2 \\
\underline{x^3 - 5x^2} \\
\qquad -22x^2 + 231x - 605 \\
\qquad \underline{-22x^2 + 110x} \\
\qquad\qquad 121x - 605 \\
\qquad\qquad \underline{121x - 605} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -27x^2 & +231x & -605) & :(x-5) = x^2 \\
x^3 & -5x^2 & & & \\
\hline
 & -22x^2 & +231x & -605 & \\
 & -22x^2 & +110x & & \\
\hline
 & & 121x & -605 & \\
 & & 121x & -605 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2-22x+121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{rl}
(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) = x^2 - 22x \\
x^3 - 5x^2 \\
\hline
-22x^2 + 231x - 605 \\
-22x^2 + 110x \\
\hline
121x - 605 \\
121x - 605 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{aligned}
&(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) = x^2 - 22x \\
&\underline{x^3 - 5x^2} \\
&\quad -22x^2 + 231x - 605 \\
&\quad \underline{-22x^2 + 110x} \\
&\qquad 121x - 605 \\
&\qquad \underline{121x - 605} \\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) = x^2 - 22x + 121 \\
\underline{x^3 - 5x^2} \\
\qquad -22x^2 + 231x - 605 \\
\qquad \underline{-22x^2 + 110x} \\
\qquad\qquad 121x - 605 \\
\qquad\qquad \underline{121x - 605} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 - & 27x^2 & +231x & -605\,) : (x-5) = x^2 - 22x + 121 \\
x^3 - & 5x^2 & & \\
\hline
 & -22x^2 & +231x & -605 \\
 & -22x^2 & +110x & \\
\hline
 & & 121x & -605 \\
 & & 121x & -605 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$
\begin{array}{rl}
(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) = x^2 - 22x + 121 \\
x^3 - 5x^2 \\
\hline
-22x^2 + 231x - 605 \\
-22x^2 + 110x \\
\hline
121x - 605 \\
121x - 605 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)}$$

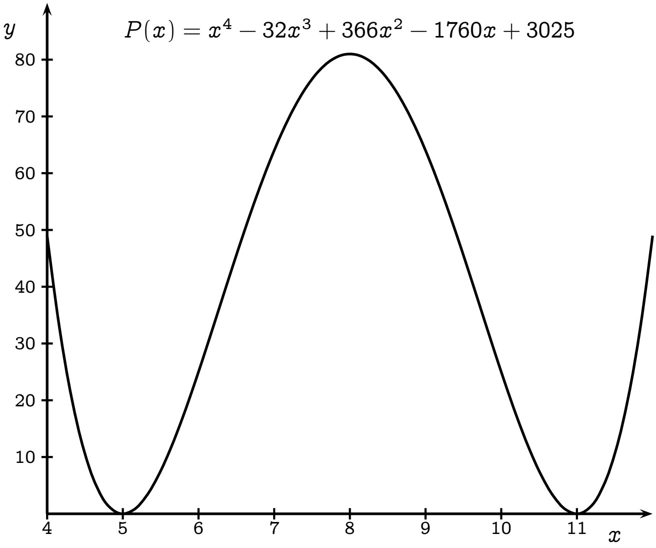
Beispiel (Fortsetzung)

Die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ ist somit

$$P(x) = (x-5)^2(x-11)^2 \, .$$

Die doppelten reellen Nullstellen sind $x_1 = 5$ und $x_2 = 11$. Da Quadrate stets nichtnegativ sind, können wir aus dieser Darstellung ablesen, dass $P(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel (Fortsetzung)



Rationale Funktionen

Definition

$$\begin{aligned} &\text{Seien} \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &\text{und} \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Polynome vom Grad n bzw. m, wobei $Q(x)$ nicht das Nullpolynom sein darf.

Dann heißt

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rationale Funktion mit dem Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x : \; Q(x) = 0\} \; .$$

Üblicherweise bringt man rationale Funktionen auf eine gekürzte Form, indem man die Faktorisierungen von $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmt und gemeinsame Faktoren kürzt.

Wichtige Eigenschaft

Liegt die rationale Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ in gekürzter Form vor, dann sind die Nullstellen von f die Nullstellen von P und die Polstellen von f die Nullstellen von Q.

Üblicherweise bringt man rationale Funktionen auf eine gekürzte Form, indem man die Faktorisierungen von $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmt und gemeinsame Faktoren kürzt.

Wichtige Eigenschaft

Liegt die rationale Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ in gekürzter Form vor, dann sind die Nullstellen von f die Nullstellen von P und die Polstellen von f die Nullstellen von Q.

Beispiel

Die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Kürzen liefert

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $g(x)$ besitzt Nullstellen für $x = -1$ und $x = 2$ und eine Polstelle für $x = 1$. Für $x \in \mathbb{D}_f$ gilt $f(x) = g(x)$.

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Kürzen liefert

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $g(x)$ besitzt Nullstellen für $x = -1$ und $x = 2$ und eine Polstelle für $x = 1$. Für $x \in \mathbb{D}_f$ gilt $f(x) = g(x)$.

Satz

Ist der Grad des n Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad m des Nennerpolynoms, so lässt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

wobei $N(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ und $R(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 1$ bezeichnet.

Die Polynome $N(x)$ und $R(x)$ erhält man durch Polynomdivision.
Für große Werte von $|x|$ ist $f(x) \approx N(x)$; $N(x)$ heißt Asymptote.

Beispiel

Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}\,.$$

Polynomdivision (mit Rest) liefert

$$\begin{array}{rl}
(x^3 \qquad\quad -2x+3) : (x^2 - x - 2) & = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2} \\
x^3 - x^2 - 2x \qquad & \\
\hline
x^2 \qquad\quad + 3 & \\
x^2 - \ x \ - 2 & \\
\hline
x + 5 &
\end{array}$$

d. h.

$$f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2 - x - 2}$$

$N(x) = x + 1$ ist Asymptote von $f(x)$.

Beispiel

Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}\,.$$

Polynomdivision (mit Rest) liefert

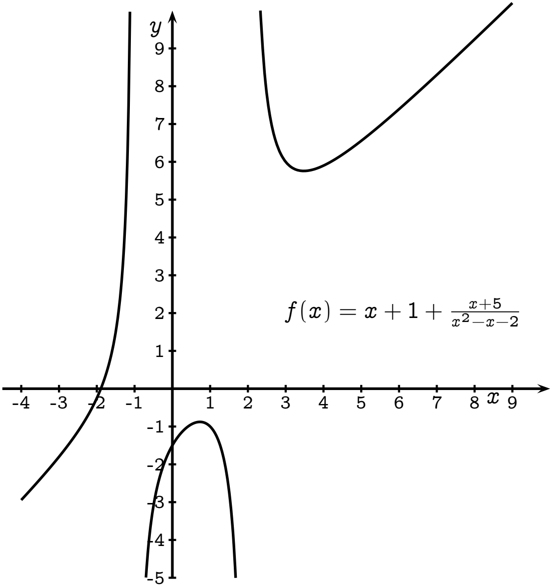
$$\begin{array}{rl}
(x^3 \qquad -2x+3) : (x^2 - x - 2) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2} & \\
x^3 - x^2 - 2x & \\
\hline
x^2 \qquad + 3 & \\
x^2 - x - 2 & \\
\hline
x + 5 &
\end{array}$$

d. h.

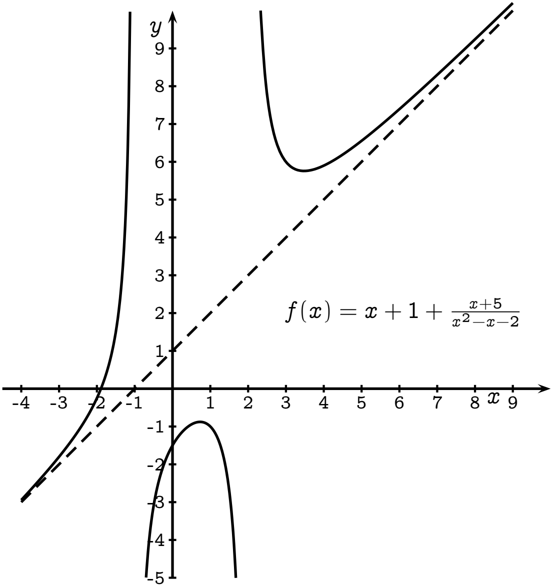
$$f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2 - x - 2}$$

$N(x) = x + 1$ ist Asymptote von $f(x)$.

Beispiel



Beispiel



Kurvenscharen

Definition

Eine Kurvenschar (oder Funktionenschar) ist eine Menge von Funktionen, deren Funktionsterm sich im Wert eines (oder mehrerer) Parameter unterscheiden.

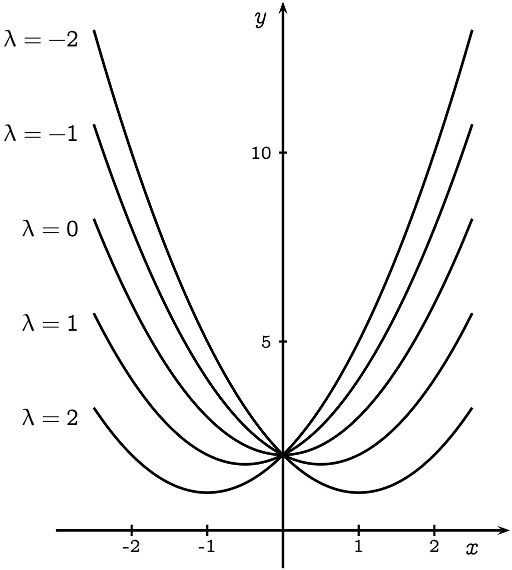
Den Parameter schreibt man häufig als Index an die Funktion $f_\lambda(x)$

Kurvenscharen

Definition

Eine Kurvenschar (oder Funktionenschar) ist eine Menge von Funktionen, deren Funktionsterm sich im Wert eines (oder mehrerer) Parameter unterscheiden.
Den Parameter schreibt man häufig als Index an die Funktion $f_\lambda(x)$

Beispiel ($f_\lambda(x) = x^2 + \lambda x + 2$)



BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel ($g_\mu(x) = \log_\mu x$)