Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr
Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	`stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`
www:	`http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Lineare Funktionen

Häufig werden in den Wirtschaftswissenschaften als einfache Modelle lineare Modelle verwendet.
Eine Funktion

$$f : x \longmapsto y$$
$$f(x) = ax + b$$

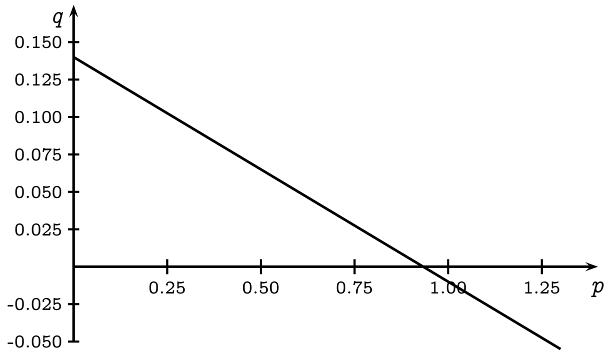
mit reellen Konstanten a und b, heißt lineare Funktion. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b.

Beispiel

Die geschätzte jährliche Nachfrage für Reis in Indien im Zeitraum 1949–1964 betrug

$$q = -0.15p + 0.14\,,$$

wobei p den Preis und q den Konsum pro Person bezeichnet. Bei steigendem Preis nimmt die Nachfrage ab.



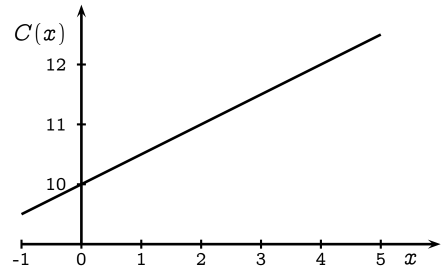
An diesem Beispiel kann man auch sehen, dass Modelle (häufig) nur in bestimmten Bereichen verwertbar sind. Da negativer Konsum nicht möglich ist, ist das Modell sicher nicht

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen

Beispiel

Ein einfaches Modell einer Kostenfunktion ist die Darstellung der Gesamtkosten als Summe der Fixkosten und der als proportional zur produzierten Menge x angenommenen variablen Kosten, z. B.

$$C(x) = 0.5x + 10\,.$$



Steigt die Produktion um eine Einheit, so steigen die Kosten um 0.5 Einheiten.

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen

Punkt-Steigungs-Formel einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung a durch den Punkt (x_1, y_1) ist gegeben durch

$$y = ax + \underbrace{y_1 - ax_1}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen

Zwei-Punkte-Formel einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte (x_1, y_1) und $x_2, y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ ist gegeben durch

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Steigung}} \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Parallelen zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen. Die zugehörigen Geradengleichungen lassen sich aber in der Form $x = c$ mit einer Konstanten c angeben.

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Quadratische Funktionen

In vielen Modellen werden Funktionen verwendet, die zunächst auf einen Minimalwert fallen und dann ansteigen oder erst auf einen Maximalwert ansteigen und dann fallen.

Einfache Funktionen mit diesen Eigenschaften sind quadratische Funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit Konstanten } a, b, c, \text{ und } a \neq 0\,.$$

Der Graph der Funktion ist eine quadratische Parabel. Sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$ und nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist.

Zur Bestimmung der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) ist die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen.

Eine quadratische Funktion besitzt am sogenannten *Scheitelpunkt* ein Minimum falls $a > 0$ und ein Maximum falls $a < 0$.

Beispiel (Bestimmung des Maximums bzw. Minimums)

Es sei $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Somit besitzt die Funktion ein Minimum.

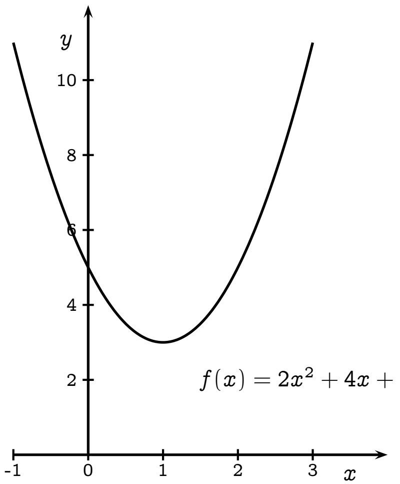
Wir bringen die Funktionsgleichung mittels quadratischer Ergänzung auf eine andere Form.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 5 \\ &= 2(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

An dieser Darstellung (Scheitelpunktform) lässt sich nun ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ ein Minimum besitzt mit $f(1) = 3$. Der Scheitelpunkt ist $S(1, 3)$.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel (Fortsetzung)



Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Bestimmung des Scheitelpunktes

Mittels quadratischen Ergänzung kann man jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ in die sogenannte *Scheitelpunktform* bringen.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Scheitelpunktform:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Da $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und a, c und $\frac{b^2}{4a}$ konstant sind, gilt:

Für $a > 0$ hat $f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Minimum.

Für $a < 0$ hat $f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Maximum.

Der Scheitelpunkt ist $S(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.

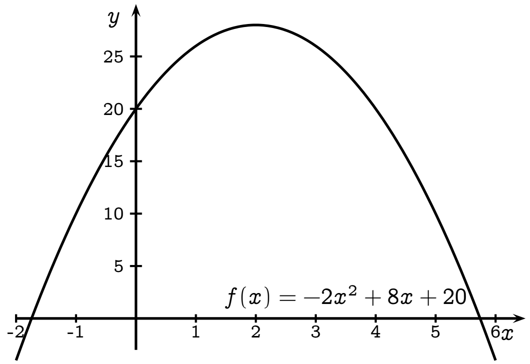
Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Wir bestimmen das Maximum von $f(x) = -2x^2 + 8x + 20$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 4x + 4) + 8 + 20 \\ &= -2 \cdot (x - 2)^2 + 28 \end{aligned}$$

$f(x)$ besitzt also an der Stelle $x = 2$ ein Maximum $f(2) = 28$.



Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Ein Unternehmen hat für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten seines Produktes Gesamtkosten von

$$C = 2Q + 0.5Q^2 .$$

Der Preis pro Einheit ist beim Verkauf von Q Einheiten

$$P = 102 - 2Q .$$

Der Gesamterlös ist somit

$$R = PQ = (102 - 2Q)Q$$

und der Gesamtgewinn (in Abhängigkeit von Q)

$$G(Q) = R - C = (102 - 2Q)Q - (2Q + 0.5Q^2) .$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

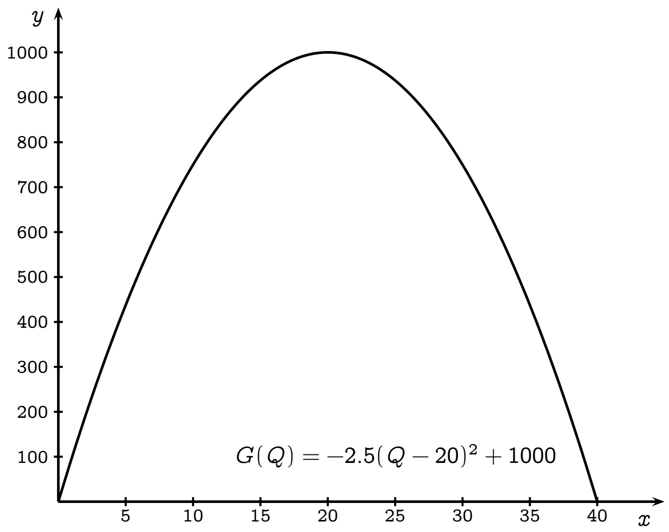
Beispiel (Fortsetzung)

Wir bestimmen den Wert von Q, der den Gewinn maximiert und berechnen den maximalen Gewinn. Umformen in die Scheitelpunktform liefert

$$G(Q) = -2.5(Q - 20)^2 + 1000 .$$

Der Gewinn wird also maximal für $Q = 20$ mit einem Gewinn von $G(20) = 1000$.

Beispiel (Fortsetzung)



Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen

Normalparabel

Die einfachste quadratische Funktion ordnet jeder reellen Zahl ihre Quadratzahl x^2 zu, d. h.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \,, \quad f : x \longmapsto x^2 \,.$$

Der Graph ist die nach oben geöffnete Normalparabel, $S(0,0)$ der Scheitelpunkt. Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse, d. h. x und $-x$ besitzen denselben Funktionswert.

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen

Streckung bzw. Stauchung der Normalparabel

Wir betrachten nun etwas allgemeinere quadratische Funktionen der Form

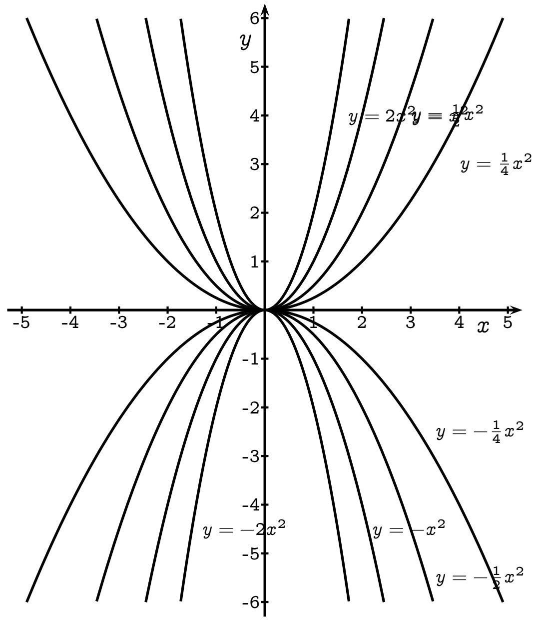
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{W}_g \,, \quad g : x \longmapsto ax^2$$

mit einem Faktor $a \neq 0$. Dabei ist der Wertebereich

$$\mathbb{W}_g = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{falls } a > 0 \\ \mathbb{R}_- & \text{falls } a < 0 \end{cases} ,$$

und der Scheitelpunkt ist unverändert $S(0,0)$. Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger, für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel. Ist $a < 0$, so ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL



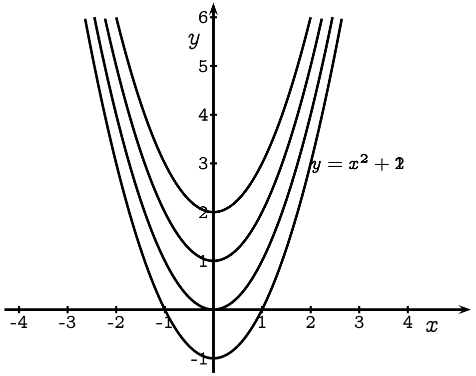
Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

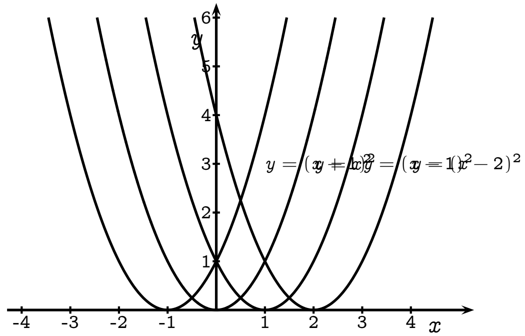
mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wir die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.



Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wir die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.



Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Eine Kombination von Stauchung bzw. Streckung, Verschiebung um y_0 in y-Richtung und Verschiebung um x_0 in x-Richtung liefert allgemein

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad \text{(Scheitelpunktform).}$$

Durch Ausmultiplizieren und Umbenennen der Parameter erhält man

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{(allgemeine Parabelform).}$$

Hat die Parabel an den Stellen x_1 und x_2 Schnittpunkte mit der x-Achse, so lässt sich der zugeörige Funktionsterm auch in der Form

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{(Nullstellenform)}$$

angeben.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Bemerkung

Man kann auch den Graphen jeder beliebigen anderen Funktion strecken bzw. stauchen, an der x-Achse spiegeln und verschieben.

- Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $|a|$, Spiegelung an der x-Achse, falls $a < 0$ entspricht der Multiplikation des Funktionsterms mit dem Faktor a.
- Verschiebung um y_0 in y-Richung entspricht der Addition der Konstanten y_0 zum Funktionsterm.
- Verschiebung um x_0 in x-Richung entspricht dem Ersetzen von x durch $x - x_0$ im Funktionsterm.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Reelle Funktionen
Lineare Funktionen
Quadratische Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL