Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	`stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`
www:	`http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Inhalt

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $3x - 2 \geqslant 4 - x$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\geqslant 4 - x \\ \iff \quad 4x &\geqslant 6 \\ \iff \quad x &\geqslant \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $-0.5x + 5 > -3$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -0.5x + 5 &> -3 \\ \iff \quad -0.5x &> -8 \\ \iff \quad x &< 16 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = (-\infty, 16)$.

Vorzeichendiagramme

Für Ungleichungen, deren linke Seite in Faktoren zerlegt ist und deren rechte Seite „0“ ist, lassen sich die Lösungsmengen gut mit Hilfe von Vorzeichendiagrammen bestimmen.

1. Bestimme für jeden Faktor die Intervalle mit positivem bzw. negativem Vorzeichen.
2. Die Vorzeichen werden für die einzelnen Faktoren in ein Diagramm eingetragen.
3. Berechne die Vorzeichenverteilung des Gesamtproduktes.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(x-2)(x+5) < 0$ gilt.

Vorzeichendiagramm

	-6	-5	0	2	3
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+5)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Für die Lösugsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = (-5, 2)$.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Hier müssen wir zunächst $x^2 - 2x - 3$ faktorisieren.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\iff x = 1 \pm \sqrt{1+3} \\ &\iff x = -1 \ \vee \ x = 3 \end{aligned}$$

Also ist $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, d. h.

$$x^2 - 2x - 3 \leqslant 0 \iff (x+1)(x-3) < 0$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr

Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln
Reelle Funktionen

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Vorzeichendiagramm

	-2	-1	0	3	4
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Für die Lösugsmenge der Ungleichung ergibt sich somit
$\mathbb{L} = [-1, 3]$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr

Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln
Reelle Funktionen

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Gesucht sind alle $p \in \mathbb{R}$, für die $\frac{2p-3}{p-1} \geqslant 3 - p$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$
Wir formen die Ungleichung zunächst äquivalent um.

$$\begin{aligned} \frac{2p-3}{p-1} \geqslant 3 - p &\iff \frac{2p-3}{p-1} + p - 3 \geqslant 0 \\ &\iff \frac{2p - 3 + (p-3)(p-1)}{p-1} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{p^2 - 2p}{p-1} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{p(p-2)}{p-1} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr

Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln
Reelle Funktionen

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Vorzeichendiagramm

	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
p	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$p-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$p-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{p(p-2)}{p-1}$	$-$	0	$+$	!	$-$	0	$+$

Das Symbol ! im Diagramm soll andeuten, dass der Wert nicht zur Definitionsmenge gehört. Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = [0, 1) \cup [2, \infty)$.

Ungleichungen mit Beträgen

Mehr noch als den Gleichungen mit Beträgen muss man beim Lösen von Ungleichungen mit Beträgen darauf achten saubere Fallunterscheidungen zu verwenden.

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x-10| \leqslant \frac{1}{2}x\,.$$

Da

$$|x-10| = \begin{cases} x-10 & \text{falls } x \geqslant 10 \\ 10-x & \text{falls } x < 10 \end{cases}$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.

1. Fall: $x \geqslant 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x-10| \leqslant \frac{1}{2}x &\iff x-10 \leqslant \frac{1}{2}x \\ &\iff \frac{1}{2}x \leqslant 10 \\ &\iff x \leqslant 20 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [10, 20]$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $x < 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x-10| \leqslant \frac{1}{2}x &\iff -x+10 \leqslant \frac{1}{2}x \\ &\iff 10 \leqslant \frac{3}{2}x \\ &\iff \frac{20}{3} \leqslant x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = [\frac{20}{3}, 10)$

Die Lösungsmenge von $|x-10| \leqslant \frac{1}{2}x$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \Big[\frac{20}{3}, 20\Big]\,.$$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x+3| \leqslant |2x-1| + 3\,.$$

$$\text{Da} \quad |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geqslant -3 \\ -x-3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

$$\text{und} \quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } x \geqslant \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.

1. Fall: $x \geqslant \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x+3| \leqslant |2x-1| + 3 \iff && x+3 \leqslant 2x-1+3 \\ \iff && 1 \leqslant x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [1, \infty)$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $-3 \leqslant x < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|x+3| \leqslant |2x-1|+3 &\iff x+3 \leqslant -2x+1+3 \\
&\iff 3x \leqslant 1 \\
&\iff x \leqslant \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \left[-3, \frac{1}{3}\right]$

3. Fall: $x < -3$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|x+3| \leqslant |2x-1|+3 &\iff -x-3 \leqslant -2x+1+3 \\
&\iff x \leqslant 7
\end{aligned}
$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = (-\infty, -3)$

Die Lösungsmenge von $|x+3| \leqslant |2x-1|+3$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty)\,.$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a > 0 \land b > 0 &\implies a+b > 0 \\
a > b &\iff a+c > b+c \\
a > b \land c > d &\implies a+c > b+d \\
a > 0 \land b > 0 &\implies ab > 0 \\
a > 0 \land b < 0 &\implies ab < 0 \\
a > b \land c > 0 &\iff ac > bc \\
a > b \land c < 0 &\iff ac < bc \\
a > b \land c > d &\implies ac > bd \\
ab > 0 &\iff (a > 0 \land b > 0) \lor (a < 0 \land b < 0) \\
ab < 0 &\iff (a > 0 \land b < 0) \lor (a < 0 \land b > 0)
\end{aligned}
$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln
Reelle Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Rechenregeln für Ungleichungen 2

Für $a, b, \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a < b &\iff a^n < b^n \\
a < b &\iff a^{-n} > b^{-n} \\
a > b \land b > c &\implies a > c
\end{aligned}
$$

Sinngemäß gelten entsprechende Regeln, wenn man die $<$ und $>$-Zeichen durch $\leqslant$ und $\geqslant$-Zeichen ersetzt.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln
Reelle Funktionen
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Inhalt

Reelle Funktionen in einer Variablen

Reelle Funktionen in einer Variablen

Definition

Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Menge $\mathbb{D}_f$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$ zuordnet. $\mathbb{D}_f$ *heißt Definitionsbereich* von f, die Menge aller möglichen Funktionswerte $\mathbb{W}_f$ *heißt Wertebereich* von f.

Bezeichnung

Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.
x heißt dann unabhängige Variable oder Argument von f und y abhängige Variable.

Funktionen können auf unterschiedliche Weise gegeben sein, z. B. durch Angabe einer Formel (des Funktionsterms), einer Wertetabelle oder Graphik.
Ist eine Funktion durch eine Formel gegeben, so besteht der Definitionsbereich aus allen Werten, für die die Formel einen eindeutigen Wert ergibt, es sei denn, ein anderer (kleinerer) Definitionsbereich ist explizit angegeben.

Beispiel

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.

Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

Beispiel

Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt $\mathbb{D}_g = (-\infty, 3]$.

Eindeutigkeit

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Graphisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y-Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.