

Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften



Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal

Fachbereich C – Mathematik und Informatik

Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email: `stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`

www: `http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`

Büro: D.13.01

Telefon: 0202-439 3487

Ungleichungen

Reelle Funktionen in einer Variablen

Ungleichungen

Lineare Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen

Ungleichungen mit Beträgen

Rechenregeln

Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln

Reelle Funktionen

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $3x - 2 \geq 4 - x$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\geq 4 - x \\ \Leftrightarrow 4x &\geq 6 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $3x - 2 \geq 4 - x$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$3x - 2 \geq 4 - x$$

$$\iff 4x \geq 6$$

$$\iff x \geq \frac{3}{2}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $-0.5x + 5 > -3$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$-0.5x + 5 > -3$$

$$\Leftrightarrow -0.5x > -8$$

$$\Leftrightarrow x < 16$$

Somit ist $\mathbb{L} = (-\infty, 16)$.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $-0.5x + 5 > -3$ erfüllt ist.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$-0.5x + 5 > -3$$

$$\Leftrightarrow -0.5x > -8$$

$$\Leftrightarrow x < 16$$

Somit ist $\mathbb{L} = (-\infty, 16)$.

Für Ungleichungen, deren linke Seite in Faktoren zerlegt ist und deren rechte Seite „0“ ist, lassen sich die Lösungsmengen gut mit Hilfe von Vorzeichendiagrammen bestimmen.

1. Bestimme für jeden Faktor die Intervalle mit positivem bzw. negativem Vorzeichen.
2. Die Vorzeichen werden für die einzelnen Faktoren in ein Diagramm eingetragen.
3. Berechne die Vorzeichenverteilung des Gesamtproduktes.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(x - 2)(x + 5) < 0$ gilt.

Vorzeichendiagramm

	-6	-5	0	2	3
$x - 2$	-	-	-	0	+
$x + 5$	-	0	+	+	+
$(x + 5)(x - 2)$	+	0	-	0	+

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit

$$\mathbb{L} = (-5, 2).$$

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(x - 2)(x + 5) < 0$ gilt.

Vorzeichendiagramm

	-6	-5	0	2	3
$x - 2$	-	-	-	0	+
$x + 5$	-	0	+	+	+
$(x + 5)(x - 2)$	+	0	-	0	+

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = (-5, 2)$.

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Hier müssen wir zunächst $x^2 - 2x - 3$ faktorisieren.

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 = 0 &\iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 3} \\ &\iff x = -1 \vee x = 3\end{aligned}$$

Also ist $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, d. h.

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x + 1)(x - 3) < 0$$

Beispiel

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Hier müssen wir zunächst $x^2 - 2x - 3$ faktorisieren.

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 = 0 &\iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 3} \\ &\iff x = -1 \vee x = 3\end{aligned}$$

Also ist $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, d. h.

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x + 1)(x - 3) < 0$$

Beispiel

Vorzeichendiagramm

	-2	-1	0	3	4
$x + 1$	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$(x + 1)(x - 3)$	+	0	-	0	+

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit
 $\mathbb{L} = [-1, 3]$

Beispiel

Gesucht sind alle $p \in \mathbb{R}$, für die $\frac{2p-3}{p-1} \geq 3 - p$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Wir formen die Ungleichung zunächst äquivalent um.

$$\begin{aligned} \frac{2p-3}{p-1} \geq 3-p &\iff \frac{2p-3}{p-1} + p - 3 \geq 0 \\ &\iff \frac{2p-3 + (p-3)(p-1)}{p-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{p^2 - 2p}{p-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{p(p-2)}{p-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel

Gesucht sind alle $p \in \mathbb{R}$, für die $\frac{2p-3}{p-1} \geq 3 - p$ gilt.

Definitionsmenge der Ungleichung: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Wir formen die Ungleichung zunächst äquivalent um.

$$\begin{aligned} \frac{2p-3}{p-1} \geq 3-p &\iff \frac{2p-3}{p-1} + p - 3 \geq 0 \\ &\iff \frac{2p-3 + (p-3)(p-1)}{p-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{p^2 - 2p}{p-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{p(p-2)}{p-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel

Vorzeichendiagramm

	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
p	-	0	+	+	+	+	+
$p-2$	-	-	-	-	-	0	+
$p-1$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{p(p-2)}{p-1}$	-	0	+	!	-	0	+

Das Symbol ! im Diagramm soll andeuten, dass der Wert nicht zur Definitionsmenge gehört. Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = [0, 1) \cup [2, \infty)$.

Ungleichungen mit Beträgen

Vorkurs
Mathematik
M. Stiglmayr

Ungleichungen
lineare
quadratische
mit Beträgen
Rechenregeln

Reelle Funktionen

Mehr noch als den Gleichungen mit Beträgen muss man beim Lösen von Ungleichungen mit Beträgen darauf achten saubere Fallunterscheidungen zu verwenden.

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x - 10| \leq \frac{1}{2}x.$$

Da

$$|x - 10| = \begin{cases} x - 10 & \text{falls } x \geq 10 \\ 10 - x & \text{falls } x < 10 \end{cases}$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.

1. *Fall*: $x \geq 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x - 10| \leq \frac{1}{2}x &\iff x - 10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\iff \frac{1}{2}x \leq 10 \\ &\iff x \leq 20 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [10, 20]$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x - 10| \leq \frac{1}{2}x.$$

Da

$$|x - 10| = \begin{cases} x - 10 & \text{falls } x \geq 10 \\ 10 - x & \text{falls } x < 10 \end{cases}$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.

1. *Fall*: $x \geq 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x - 10| \leq \frac{1}{2}x &\iff x - 10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\iff \frac{1}{2}x \leq 10 \\ &\iff x \leq 20 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [10, 20]$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $x < 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|x - 10| \leq \frac{1}{2}x &\iff -x + 10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\iff 10 \leq \frac{3}{2}x \\ &\iff \frac{20}{3} \leq x\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = [\frac{20}{3}, 10)$

Die Lösungsmenge von $|x - 10| \leq \frac{1}{2}x$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von \mathbb{L}_1 und \mathbb{L}_2 , d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[\frac{20}{3}, 20\right].$$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $x < 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x - 10| \leq \frac{1}{2}x &\iff -x + 10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\iff 10 \leq \frac{3}{2}x \\ &\iff \frac{20}{3} \leq x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = [\frac{20}{3}, 10)$

Die Lösungsmenge von $|x - 10| \leq \frac{1}{2}x$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von \mathbb{L}_1 und \mathbb{L}_2 , d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[\frac{20}{3}, 20 \right].$$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x + 3| \leq |2x - 1| + 3.$$

$$\text{Da } |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

$$\text{und } |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.

1. Fall: $x \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x + 3| \leq |2x - 1| + 3 &\iff x + 3 \leq 2x - 1 + 3 \\ &\iff 1 \leq x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [1, \infty)$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x + 3| \leq |2x - 1| + 3.$$

$$\text{Da } |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

$$\text{und } |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.

1. Fall: $x \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x + 3| \leq |2x - 1| + 3 &\iff x + 3 \leq 2x - 1 + 3 \\ &\iff 1 \leq x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [1, \infty)$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $-3 \leq x < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|x + 3| \leq |2x - 1| + 3 &\iff x + 3 \leq -2x + 1 + 3 \\ &\iff 3x \leq 1 \\ &\iff x \leq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \left[-3, \frac{1}{3}\right]$

3. Fall: $x < -3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|x + 3| \leq |2x - 1| + 3 &\iff -x - 3 \leq -2x + 1 + 3 \\ &\iff x \leq 7\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = (-\infty, -3)$

Die Lösungsmenge von $|x + 3| \leq |2x - 1| + 3$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty).$$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $-3 \leq x < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|x + 3| \leq |2x - 1| + 3 &\iff x + 3 \leq -2x + 1 + 3 \\ &\iff 3x \leq 1 \\ &\iff x \leq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \left[-3, \frac{1}{3}\right]$

3. Fall: $x < -3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|x + 3| \leq |2x - 1| + 3 &\iff -x - 3 \leq -2x + 1 + 3 \\ &\iff x \leq 7\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = (-\infty, -3)$

Die Lösungsmenge von $|x + 3| \leq |2x - 1| + 3$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty).$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies a + b > 0$$

$$a > b \iff a + c > b + c$$

$$a > b \wedge c > d \implies a + c > b + d$$

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies ab > 0$$

$$a > 0 \wedge b < 0 \implies ab < 0$$

$$a > b \wedge c > 0 \iff ac > bc$$

$$a > b \wedge c < 0 \iff ac < bc$$

$$a > b \wedge c > d \implies ac > bd$$

$$ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies a + b > 0$$

$$a > b \iff a + c > b + c$$

$$a > b \wedge c > d \implies a + c > b + d$$

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies ab > 0$$

$$a > 0 \wedge b < 0 \implies ab < 0$$

$$a > b \wedge c > 0 \iff ac > bc$$

$$a > b \wedge c < 0 \iff ac < bc$$

$$a > b \wedge c > d \implies ac > bd$$

$$ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies a + b > 0$$

$$a > b \iff a + c > b + c$$

$$a > b \wedge c > d \implies a + c > b + d$$

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies ab > 0$$

$$a > 0 \wedge b < 0 \implies ab < 0$$

$$a > b \wedge c > 0 \iff ac > bc$$

$$a > b \wedge c < 0 \iff ac < bc$$

$$a > b \wedge c > d \implies ac > bd$$

$$ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Rechenregeln für Ungleichungen 2

Für $a, b, \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a < b \quad \iff a^n < b^n$$

$$a < b \quad \iff a^{-n} > b^{-n}$$

$$a > b \wedge b > c \implies a > c$$

Sinngemäß gelten entsprechende Regeln, wenn man die $<$ und $>$ -Zeichen durch \leq und \geq -Zeichen ersetzt.

Rechenregeln für Ungleichungen 2

Für $a, b, \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a < b \quad \iff a^n < b^n$$

$$a < b \quad \iff a^{-n} > b^{-n}$$

$$a > b \wedge b > c \implies a > c$$

Sinngemäß gelten entsprechende Regeln, wenn man die $<$ und $>$ -Zeichen durch \leq und \geq -Zeichen ersetzt.

Reelle Funktionen in einer Variablen

Definition

Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Menge \mathbb{D}_f eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$ zuordnet. \mathbb{D}_f heißt *Definitionsbereich* von f , die Menge aller möglichen Funktionswerte \mathbb{W}_f heißt *Wertebereich* von f .

Bezeichnung

*Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.
 x heißt dann *unabhängige Variable* oder *Argument* von f und y *abhängige Variable*.*

Definition

Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Menge \mathbb{D}_f eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$ zuordnet. \mathbb{D}_f heißt *Definitionsbereich* von f , die Menge aller möglichen Funktionswerte \mathbb{W}_f heißt *Wertebereich* von f .

Bezeichnung

*Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.
 x heißt dann unabhängige Variable oder Argument von f und y abhängige Variable.*

Funktionen können auf unterschiedliche Weise gegeben sein, z. B. durch Angabe einer Formel (des Funktionsterms), einer Wertetabelle oder Graphik.

Ist eine Funktion durch eine Formel gegeben, so besteht der Definitionsbereich aus allen Werten, für die die Formel einen eindeutigen Wert ergibt, es sei denn, ein anderer (kleinerer) Definitionsbereich ist explizit angegeben.

Funktionen können auf unterschiedliche Weise gegeben sein, z. B. durch Angabe einer Formel (des Funktionsterms), einer Wertetabelle oder Graphik.

Ist eine Funktion durch eine Formel gegeben, so besteht der Definitionsbereich aus allen Werten, für die die Formel einen eindeutigen Wert ergibt, es sei denn, ein anderer (kleinerer) Definitionsbereich ist explizit angegeben.

Beispiel

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.

Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

Beispiel

Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt $\mathbb{D}_g = (-\infty, 3]$.

Beispiel

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.

Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}.$$

Beispiel

Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt

$$\mathbb{D}_g = (-\infty, 3].$$

Beispiel

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.

Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}.$$

Beispiel

Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt

$$\mathbb{D}_g = (-\infty, 3].$$

Beispiel

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.

Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}.$$

Beispiel

Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Zahlen definiert ist, gilt

$$\mathbb{D}_g = (-\infty, 3].$$

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Graphisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y -Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Graphisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y -Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.

Wichtig an der Definition einer Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Graphisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y -Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.