Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	`stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`
www:	`http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

Gleichungen der Form $x^n = a$

Wir betrachten zunächst einige typische Beispiele.

Beispiel

1. $x^4 = 16$

$$\begin{aligned} & x^4 = 16 \\ \iff \quad & x = \pm\sqrt[4]{16} \\ \iff \quad & x = -2 \lor x = 2 \end{aligned}$$

   Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

2. $x^6 = -64$ ist nicht lösbar, da bei geradem Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann. $\mathbb{L} = \{\quad\}$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Wir betrachten zunächst einige typische Beispiele.

Beispiel

1. $x^4 = 16$

$$\begin{aligned} & x^4 = 16 \\ \iff \quad & x = \pm\sqrt[4]{16} \\ \iff \quad & x = -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

   Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

2. $x^6 = -64$ ist nicht lösbar, da bei geradem Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann. $\mathbb{L} = \{\quad\}$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Wir betrachten zunächst einige typische Beispiele.

Beispiel

1. $x^4 = 16$

$$
\begin{aligned}
& x^4 = 16 \\
\iff \quad & x = \pm\sqrt[4]{16} \\
\iff \quad & x = -2 \lor x = 2
\end{aligned}
$$

   Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

2. $x^6 = -64$ ist nicht lösbar, da bei geradem Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann. $\mathbb{L} = \{\quad\}$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Wir betrachten zunächst einige typische Beispiele.

Beispiel

1. $x^4 = 16$

$$\begin{aligned} x^4 &= 16 \\ \iff \quad x &= \pm\sqrt[4]{16} \\ \iff \quad x &= -2 \vee x = 2 \end{aligned}$$

   Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

2. $x^6 = -64$ ist nicht lösbar, da bei geradem Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann. $\mathbb{L} = \{\quad\}$

Beispiel

3. $x^3 = 27$

$$
\begin{aligned}
x^3 &= 27 \\
\iff x &= \sqrt[3]{27} \\
\iff x &= 3
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{3\}$

4. $x^3 = -64$

$$
\begin{aligned}
x^3 &= -64 \\
\iff x &= -\sqrt[3]{64} \\
\iff x &= -4
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-4\}$

Beispiel

3. $x^3 = 27$

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 \\ \iff x &= \sqrt[3]{27} \\ \iff x &= 3 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{3\}$

4. $x^3 = -64$

$$\begin{aligned} x^3 &= -64 \\ \iff x &= -\sqrt[3]{64} \\ \iff x &= -4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-4\}$

Beispiel

3. $x^3 = 27$

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 \\ \iff x &= \sqrt[3]{27} \\ \iff x &= 3 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{3\}$

4. $x^3 = -64$

$$\begin{aligned} x^3 &= -64 \\ \iff x &= -\sqrt[3]{64} \\ \iff x &= -4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-4\}$

Beispiel

3. $x^3 = 27$

$$x^3 = 27$$
$$\iff \quad x = \sqrt[3]{27}$$
$$\iff \quad x = 3$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{3\}$

4. $x^3 = -64$

$$x^3 = -64$$
$$\iff \quad x = -\sqrt[3]{64}$$
$$\iff \quad x = -4$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-4\}$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{array}{ll}
n \text{ gerade und } a > 0: & \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ gerade und } a = 0: & \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ gerade und } a < 0: & \mathbb{L} = \{\,\} \\
n \text{ ungerade und } a > 0: & \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ ungerade und } a = 0: & \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ ungerade und } a < 0: & \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}
\end{array}
$$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{array}{ll}
n \text{ gerade und } a > 0: & \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ gerade und } a = 0: & \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ gerade und } a < 0: & \mathbb{L} = \{\,\} \\
n \text{ ungerade und } a > 0: & \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ ungerade und } a = 0: & \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ ungerade und } a < 0: & \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}
\end{array}
$$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$n \text{ gerade und } a > 0: \quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$$

$$n \text{ gerade und } a = 0: \quad \mathbb{L} = \{0\}$$

$$n \text{ gerade und } a < 0: \quad \mathbb{L} = \{\ \}$$

$$n \text{ ungerade und } a > 0: \quad \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}$$

$$n \text{ ungerade und } a = 0: \quad \mathbb{L} = \{0\}$$

$$n \text{ ungerade und } a < 0: \quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}$$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
&n \text{ gerade und } a > 0: && \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} \\
&n \text{ gerade und } a = 0: && \mathbb{L} = \{0\} \\
&n \text{ gerade und } a < 0: && \mathbb{L} = \{\,\} \\
&n \text{ ungerade und } a > 0: && \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\} \\
&n \text{ ungerade und } a = 0: && \mathbb{L} = \{0\} \\
&n \text{ ungerade und } a < 0: && \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
&n \text{ gerade und } a > 0: && \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}\\
&n \text{ gerade und } a = 0: && \mathbb{L} = \{0\}\\
&n \text{ gerade und } a < 0: && \mathbb{L} = \{\,\}\\
&n \text{ ungerade und } a > 0: && \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}\\
&n \text{ ungerade und } a = 0: && \mathbb{L} = \{0\}\\
&n \text{ ungerade und } a < 0: && \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Geichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
n \text{ gerade und } a > 0: &\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ gerade und } a = 0: &\quad \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ gerade und } a < 0: &\quad \mathbb{L} = \{\,\} \\
n \text{ ungerade und } a > 0: &\quad \mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\} \\
n \text{ ungerade und } a = 0: &\quad \mathbb{L} = \{0\} \\
n \text{ ungerade und } a < 0: &\quad \mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}
\end{aligned}
$$

Gleichungen mit Beträgen

Beim Lösen von Gleichungen mit Beträgen ist es wichtig, genau auf die nötigen Fallunterscheidungen zu achten.

Für *jeden einzelnen Betrag* muss dazu überlegt werden, für welche Werte der Variablen das Argument des Betrags positiv oder negativ ist.

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = 5\,.$$

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{falls } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Fall: $x \geqslant \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |3x-2| = 5 \\ \iff & 3x - 2 = 5 \\ \iff & 3x = 7 \\ \iff & x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = \{\frac{7}{3}\}$

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = 5\,.$$

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{falls } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2-3x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Fall: $x \geqslant \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |3x-2| = 5 \\ \iff & 3x-2 = 5 \\ \iff & 3x = 7 \\ \iff & x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = \{\frac{7}{3}\}$

Beispiel (Fortsetzung)

2. Fall: $x < \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |3x - 2| &= 5 \\ \iff 2 - 3x &= 5 \\ \iff -3x &= 3 \\ \iff x &= -1 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \{-1\}$
Die Lösungsmenge von $|3x - 2| = 5$ ergibt sich nun als Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}.$$

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x-2| = |x-5|\,.$$

Da

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{falls } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2-3x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

und

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{falls } x \geqslant 5 \\ 5-x & \text{falls } x < 5 \end{cases}$$

müssen die drei Fälle $x < \frac{2}{3}$,$\frac{2}{3} \leqslant x < 5$ und $x \geqslant 5$ betrachtet werden.

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3x - 2| = |x - 5|.$$

Da

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{falls } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

und

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{falls } x \geqslant 5 \\ 5 - x & \text{falls } x < 5 \end{cases}$$

müssen die drei Fälle $x < \frac{2}{3}$,$\frac{2}{3} \leqslant x < 5$ und $x \geqslant 5$ betrachtet werden.

Beispiel (Fortsetzung)

1. Fall: $x \geqslant 5$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|3x-2| = |x-5| \\
\iff\ & 3x-2 = x-5 \\
\iff\ & 2x = -3 \\
\iff\ & x = -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Da $-\frac{3}{2} \ngeqslant 5$ ist, gilt $\mathbb{L}_1 = \{\}$.

2. Fall: $\frac{2}{3} \leqslant x < 5$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|3x-2| = |x-5| \\
\iff\ & 3x-2 = 5-x \\
\iff\ & 4x = 7 \\
\iff\ & x = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

Beispiel (Fortsetzung)

3. Fall: $x < \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &|3x-2| = |x-5| \\ \iff\ & 2-3x = 5-x \\ \iff\ & -3 = 2x \\ \iff\ & x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
Die Lösungsmenge von $|3x-2| = |x-5|$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}.$$

Lösen von Exponentialgleichungen

Die Lösung einer einfachen Exponentialgleichung

$$a^x = b \text{ mit } a, b > 0,\ a \neq 1$$

erhält man durch Anwenden des Logarithmus zur Basis a als

$$x = \log_a b\,,$$

da $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$.

Beispiel

Wir lösen die Gleichung $15^x = \frac{1}{225}$.

$$
\begin{aligned}
15^x &= \frac{1}{225} \\
\iff x &= \log_{15} \frac{1}{225} \\
\iff x &= \log_{15} 15^{-2} \\
\iff x &= -2
\end{aligned}
$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2\}$

Beispiel

Wir lösen die Gleichung $15^x = \frac{1}{225}$.

$$\begin{aligned} 15^x &= \frac{1}{225} \\ \iff x &= \log_{15} \frac{1}{225} \\ \iff x &= \log_{15} 15^{-2} \\ \iff x &= -2 \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2\}$

Beispiel

Wir lösen die Gleichung $2^x = 3$.

$$
\begin{aligned}
& 2^x = 3 \\
\Longleftrightarrow\ & x = \log_2 3
\end{aligned}
$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\log_2 3\}$.

Will man mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die Lösung berechnen, so muss man $\log_2 3$ in einen Quotienten aus Logarithmen zur Basis 10 oder e umwandeln, d. h.

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58\,.$$

Beispiel

Wir lösen die Gleichung $2^x = 3$.

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 \\ \iff x &= \log_2 3 \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\log_2 3\}$.

Will man mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die Lösung berechnen, so muss man $\log_2 3$ in einen Quotienten aus Logarithmen zur Basis 10 oder e umwandeln, d. h.

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58\,.$$

Beispiel

Wir lösen die Gleichung $2^x = 3$.

$$2^x = 3$$
$$\iff x = \log_2 3$$

Somit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\log_2 3\}$.

Will man mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die Lösung berechnen, so muss man $\log_2 3$ in einen Quotienten aus Logarithmen zur Basis 10 oder e umwandeln, d. h.

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58\,.$$

Parameterabhängige Gleichungen

Beispiel

$$ax^2 - 3x = 2x^2$$

$$\iff x((a-2)x-3) = 0$$

$$\iff x = 0 \lor (a-2)x - 3 = 0$$

$$\overset{a\neq 2}{\iff} x = 0 \lor x = \frac{3}{a-2}$$

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls} \quad a = 2 \\ \{0, \frac{3}{a-2}\}, & \text{falls} \quad a \neq 2 \end{cases}$$

Parameterabhängige Gleichungen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& ax^2 - 3x = 2x^2 \\
\iff & x((a-2)x-3) = 0 \\
\iff & x = 0 \lor (a-2)x - 3 = 0 \\
\overset{a \neq 2}{\iff} & x = 0 \lor x = \frac{3}{a-2}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{L} = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } a = 2 \\ \{0, \frac{3}{a-2}\}, & \text{falls } a \neq 2 \end{cases}
$$

Beispiel

$$a(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\iff a(x-1)^2 = (x-1)^2$$

$$\iff (a-1)(x-1)^2 = 0$$

$$\overset{a\neq 1}{\iff} x = 1$$

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls} \quad a = 1 \\ \{1\}, & \text{falls} \quad a \neq 1 \end{cases}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} & a(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ \iff & a(x-1)^2 = (x-1)^2 \\ \iff & (a-1)(x-1)^2 = 0 \\ \overset{a \neq 1}{\iff} & x = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls} \quad a = 1 \\ \{1\}, & \text{falls} \quad a \neq 1 \end{cases}$$

Bemerkung

Eine Gleichung kann abhängig von dem Parameterwert mehr oder weniger Lösungen haben (insbesondere auch unendlich viele) oder unlösbar sein.

Bei Umformungen ist auf die Äquivalenz der beiden Gleichungen für alle möglichen Parameterwerte zu achten. Häufig müssen dabei Fallunterscheidungen verwendet werden.

Bemerkung

Eine Gleichung kann abhängig von dem Parameterwert mehr oder weniger Lösungen haben (insbesondere auch unendlich viele) oder unlösbar sein.

Bei Umformungen ist auf die Äquivalenz der beiden Gleichungen für alle möglichen Parameterwerte zu achten. Häufig müssen dabei Fallunterscheidungen verwendet werden.

Einfache lineare Gleichungssysteme

Wir behandeln hier den Fall eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte.

Beispiel

In dem folgenden (einfachen) Modell bezeichne Y das Bruttoinlandsprodukt (BIP), C den Konsum und I_0 die fest vorgegebene Gesamtinvestition jeweils in Geldeinheiten.
Das Modell besteht nun in der Annahme, dass das BIP die Summe aus Konsum und Gesamtinvestition ist, und dass der Konsum eine lineare Funktion des BIP ist,

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

mit festen Parametern $a > 0$ und $0 < b < 1$.
Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Gleichungssystem lösbar ist und was gegebenenfalls die Lösung ist.

Beispiel (Fortsetzung)

Will man das Problem für verschiedene Parameterwerte behandeln, ist es ziemlich unpraktisch, für alle diese Parameterwerte das Gleichungssystem neu zu lösen. Sinnvoller ist es, im Falle der Lösbarkeit, die Lösungen für Y und C in Abängigkeit von den Parametern zu bestimmen.
Versuchen Sie selbst zu verifizieren, dass

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b} I_0\,,\;\; C = \frac{b}{1-b} I_0 + \frac{a}{1-b}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

löst.

Wir behandeln das Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte x_1 und x_2 allgemein.
Sei also

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ (2) \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}$$

Geometrisch sind dies die Gleichungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$.
Wir suchen nun Wertepaare (x_1, x_2), die beide Gleichungen erfüllen, d. h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.

Dafür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)
2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (geometrisch: Die Geraden sind gleich.)
3. Es gibt keine Lösung.
   (geometrisch: Die Geraden sind parallel aber nicht gleich.)

Dafür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)

2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (geometrisch: Die Geraden sind gleich.)

3. Es gibt keine Lösung.
   (geometrisch: Die Geraden sind parallel aber nicht gleich.)

Dafür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung.
   (geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)
2. Es gibt unendlich viele Lösungen.
   (geometrisch: Die Geraden sind gleich.)
3. Es gibt keine Lösung.
   (geometrisch: Die Geraden sind parallel aber nicht gleich.)

Es wird vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$
\begin{array}{lrcrcr}
(1)\cdot a_{22}: & a_{22}a_{11}x_1 & + & a_{22}a_{12}x_2 & = & a_{22}b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}): & -a_{12}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{22}x_2 & = & -a_{12}b_2 \\
\hline
(I) & (a_{11}a_{22} & - & a_{12}a_{21})x_1 & = & b_1a_{22}-b_2a_{12}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
(1)\cdot(-a_{21}): & -a_{21}a_{11}x_1 & - & a_{21}a_{12}x_2 & = & -a_{21}b_1 \\
(2)\cdot a_{11}: & a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 \\
\hline
(II) & (a_{11}a_{22} & - & a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2-a_{21}b_1
\end{array}
$$

Daraus sieht man nun:

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heißt Determinante; er bestimmt Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

   $$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

   2.2 Ist $D = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \wedge a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   2.3 Ist $D = 0 \wedge (a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0 \vee a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Daraus sieht man nun:

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ heißt Determinante; er bestimmt Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems.
   - 2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\,,\; x_2 = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

   - 2.2 Ist $D = 0 \wedge a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2 = 0 \wedge a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   - 2.3 Ist $D = 0 \wedge (a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2 \neq 0 \vee a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Daraus sieht man nun:

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heißt Determinante; er bestimmt Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \; x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

   2.2 Ist $D = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \wedge a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   2.3 Ist $D = 0 \wedge (a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0 \vee a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Daraus sieht man nun:

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heißt Determinante; er bestimmt Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung
   $$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,,\; x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$
   2.2 Ist $D = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \wedge a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   2.3 Ist $D = 0 \wedge (a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0 \vee a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Daraus sieht man nun:

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.
2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heißt Determinante; er bestimmt Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems.
   2.1 Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \; x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

   2.2 Ist $D = 0 \wedge a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \wedge a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   2.3 Ist $D = 0 \wedge (a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0 \vee a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Bezeichnung

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

heißt Determinante zweiter Ordnung.
Ebenso:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

und

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

D_{x_1} *und* D_{x_2} *erhält man aus* D*, indem man die 1. bzw. 2. Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems (1) und (2) ersetzt.*

Damit gilt:

$$(I)\, D \cdot x_1 = D_{x_1}$$
$$(II)\, D \cdot x_2 = D_{x_2}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\},$$

2. $D = 0 \wedge D_{x_1} = 0 \wedge D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}.$$

3. $D = 0 \wedge (D_{x_1} \neq 0 \vee D_{x_2} \neq 0)$. Dann ist (I) oder (II) nicht erfüllbar, also:

$$\mathbb{L} = \{\,\},$$

Damit gilt:

$$(I)\, D \cdot x_1 = D_{x_1}$$
$$(II)\, D \cdot x_2 = D_{x_2}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\},$$

2. $D = 0 \wedge D_{x_1} = 0 \wedge D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}.$$

3. $D = 0 \wedge (D_{x_1} \neq 0 \vee D_{x_2} \neq 0)$. Dann ist (I) oder (II) nicht erfüllbar, also:

$$\mathbb{L} = \{\},$$

Damit gilt:

$$(I)\, D \cdot x_1 = D_{x_1}$$
$$(II)\, D \cdot x_2 = D_{x_2}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\},$$
2. $D = 0 \wedge D_{x_1} = 0 \wedge D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und (II) $0 = 0$, also
$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}.$$
3. $D = 0 \wedge (D_{x_1} \neq 0 \vee D_{x_2} \neq 0)$. Dann ist (I) oder (II) nicht erfüllbar, also:
$$\mathbb{L} = \{\,\},$$

Beispiel

Es soll das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 &= 3 \\
\frac{1}{3}x_1 + x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

gelöst werden.

Dazu berechnen wir die zugehörigen Determinanten.

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = 3
$$

Da $D \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$
x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 3\,, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = 1\,.
$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3,1)\}$.

Beispiel

Es soll das lineare Gleichungssystem

$$2x_1 - 3x_2 = 3$$
$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 = 2$$

gelöst werden.

Dazu berechnen wir die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Da $D \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 3\,, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = 1\,.$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3, 1)\}$.