

# Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften



Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal  
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

## Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal  
Fachbereich C – Mathematik und Informatik  
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email: [stiglmayr@math.uni-wuppertal.de](mailto:stiglmayr@math.uni-wuppertal.de)  
www: <http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi>  
Büro: D.13.01  
Telefon: 0202-439 3487



## Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

Vorkurs  
Mathematik  
*M. Stiglmayr*

Gleichungen



## Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

Vorkurs  
Mathematik  
*M. Stiglmayr*

Gleichungen



# Gleichungen und Gleichungssysteme

- ▶ eine oder mehrere Variablen
- ▶ von Parametern abhängig
- ▶ Lösung mit Hilfe von Äquivalenzumformungen
- ▶ für welche Werte der Variablen ist die Gleichung sinnvoll definiert?

## Beispiel

Für welche Werte von  $p$  gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p - 3) = 3(1 - p) - \frac{7}{6}(p + 2) ?$$

Definitionsmenge der Gleichung:  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} 6p - \frac{1}{2}(2p - 3) &= 3(1 - p) - \frac{7}{6}(p + 2) \\ \Leftrightarrow 6p - p + \frac{3}{2} &= 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} \\ \Leftrightarrow 5p + \frac{3}{2} &= \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p \\ \Leftrightarrow \frac{55}{6}p &= -\frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} = -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

Lösungsmenge:  $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{11}\}$

## Beispiel

Für welche Werte von  $x$  gilt die Gleichung

$$\frac{2x^2 + 5x - 9}{x(x + 3)} = \frac{2}{x + 3} + 1 ?$$

Definitionsmenge der Gleichung:  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$  (da Division durch Null nicht erlaubt)

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 5x - 9}{x(x + 3)} &= \frac{2}{x + 3} + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 9 &= 2x + x^2 + 3x \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 9 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\ \Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -3) &\wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:  $\mathbb{L} = \{3\}$

## Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit  $B$  die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €:  $23B + 10000$ , die Einnahmen in €  $68B$ .

Grundmenge:  $\mathbb{N}$

Definitionsmenge der Gleichung:  $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 68B - (23B + 10000) &= 57500 \\ \Leftrightarrow 45B &= 67500 \\ \Leftrightarrow B &= 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

## Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0.$$

Mit den Abkürzungen  $p = \frac{b}{a}$  und  $q = \frac{c}{a}$  ist dies äquivalent zu

$$x^2 + px + q = 0,$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung bezeichnet man als

**Diskriminante**  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ .

## Quadratische Gleichungen (2)

Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ :

1. *Fall*:  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also  $\mathbb{L} = \{\}$ .

2. *Fall*:  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

$$\text{Dann ist } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die quadratische Gleichung hat also

zwei verschiedene Lösungen, wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}$$

eine (doppelte) Lösung, wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2} \right\}$$

keine Lösung, wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

$$\mathbb{L} = \{\}$$

### Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

Für die Diskriminante gilt  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$ ; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Somit:  $\mathbb{L} = \{1, 2\}$

### Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 - x + 2 = 0$ .

Für die Diskriminante gilt  $(\frac{1}{2})^2 - 2 = -\frac{7}{4} < 0$ ; es gibt also keine reelle Lösung.

Somit:  $\mathbb{L} = \{ \}$

## Faktorisierung

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den **quadratischen Term faktorisieren**, d. h. **in Linearfaktoren zerlegen**.

Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q$ , so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

### Beispiel (Faktorisierung)

Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von  $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$  in Linearfaktoren.

Lösung der Gleichung  $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$  bzw. äquivalent dazu der zugehörigen Normalform  $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$ .

Für die Diskriminante gilt  $(\frac{1}{12})^2 + \frac{1}{3} = \frac{49}{144} > 0$ ; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

### Beispiel (Faktorisierung (Fortsetzung))

Wir erhalten also die Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\}$

Somit lässt sich der quadratische Term in Linearfaktoren zerlegen und es gilt

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

### Bemerkung

Der Vorfaktor  $a$  vor  $x^2$  ist auch Vorfaktor der faktorisierten Gleichung.

## Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung  $c = 0$ , so lässt sich  $ax^2 + bx = 0$  einfacher durch Ausklammern lösen.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ \Leftrightarrow x(ax + b) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

### Bemerkung

Die Gleichung darf nicht durch  $x$  dividiert werden. Die Lösung  $x = 0$  würde sonst „verloren gehen“.

### Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung  $2x^2 + 3x = 0$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(2x + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Somit:  $\mathbb{L} = \{0, -\frac{3}{2}\}$

## Binomische Formeln

Manchmal lassen sich quadratische Gleichungen auch einfach durch Anwendung der binomischen Formeln lösen.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$