Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	`stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`
www:	`http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

- eine oder mehrere Variablen
- von Parametern abhängig
- Lösung mit Hilfe von Äquivalenzumformungen
- für welche Werte der Variablen ist die Gleichung sinnvoll definiert?

Beispiel

Für welche Werte von p gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \text{ ?}$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
& & 6p - \frac{1}{2}(2p-3) &= 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \\
&\Longleftrightarrow & 6p - p + \frac{3}{2} &= 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} \\
&\Longleftrightarrow & 5p + \frac{3}{2} &= \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p \\
&\Longleftrightarrow & \frac{55}{6}p &= -\frac{5}{6} \\
&\Longleftrightarrow & p &= -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} = -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{11}\}$

Beispiel

Für welche Werte von p gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \; ?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
& 6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \\
\Longleftrightarrow \quad & 6p - p + \frac{3}{2} = 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} \\
\Longleftrightarrow \quad & 5p + \frac{3}{2} = \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{55}{6}p = -\frac{5}{6} \\
\Longleftrightarrow \quad & p = -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} = -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{11}\}$

Beispiel

Für welche Werte von p gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \text{ ?}$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & & 6p - \frac{1}{2}(2p-3) &= 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) \\
 & \iff & 6p - p + \frac{3}{2} &= 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} \\
 & \iff & 5p + \frac{3}{2} &= \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p \\
 & \iff & \frac{55}{6}p &= -\frac{5}{6} \\
 & \iff & p &= -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} = -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{11}\}$

Beispiel

Für welche Werte von x gilt die Gleichung

$$\frac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1\ ?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ (da Division durch Null nicht erlaubt)

Lösen der Gleichung:

$$\frac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1$$

$$\iff 2x^2+5x-9 = 2x+x^2+3x \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3$$

$$\iff x^2 = 9 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3$$

$$\iff (x=3 \vee x=-3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3$$

$$\iff x = 3$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

Beispiel

Für welche Werte von x gilt die Gleichung

$$\frac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1\ ?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ (da Division durch Null nicht erlaubt)

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{2x^2+5x-9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1 \\
\iff & 2x^2+5x-9 = 2x + x^2 + 3x \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\
\iff & x^2 = 9 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\
\iff & (x = 3 \vee x = -3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 \\
\iff & x = 3
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& 68B - (23B + 10000) = 57500 \\
\iff\ & 45B = 67500 \\
\iff\ & B = 1500
\end{aligned}
$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.

Grundmenge: $\mathbb{N}$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 68B - (23B + 10000) &= 57500 \\ \iff 45B &= 67500 \\ \iff \quad B &= 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& 68B - (23B + 10000) = 57500 \\
\iff\ & 45B = 67500 \\
\iff\ & \quad B = 1500
\end{aligned}
$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.

Grundmenge: $\mathbb{N}$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 68B - (23B + 10000) &= 57500 \\ \iff 45B &= 67500 \\ \iff B &= 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & 68B - (23B + 10000) = 57500 \\ \iff\ & 45B = 67500 \\ \iff\ & B = 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & 68B - (23B + 10000) = 57500 \\ \iff & 45B = 67500 \\ \iff & \quad B = 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & 68B - (23B + 10000) = 57500 \\ \iff & 45B = 67500 \\ \iff & \quad B = 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Beispiel

Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher her. Die Produktion kostet pro Buch 23 €. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von 10000 €. Jedes Buch wird für 68 € verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 57500 € zu erzielen?

Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23B + 10000$, die Einnahmen in € $68B$.
Grundmenge: $\mathbb{N}$
Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & 68B - (23B + 10000) = 57500 \\ \iff & 45B = 67500 \\ \iff & \quad B = 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \iff \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung bezeichnet man als Diskriminante $(\frac{p}{2})^2 - q$.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung bezeichnet man als Diskriminante $(\frac{p}{2})^2 - q$.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung bezeichnet man als Diskriminante $(\frac{p}{2})^2 - q$.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \iff \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung bezeichnet man als Diskriminante $(\frac{p}{2})^2 - q$.

Quadratische Gleichungen

Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

der quadratischen Gleichung in Normalform.

Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung bezeichnet man als Diskriminante $(\frac{p}{2})^2 - q$.

Quadratische Gleichungen (2)

Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also $\mathbb{L} = \{\,\}$.

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\text{Dann ist } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\iff \quad x + \frac{p}{2} &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\iff \quad x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen (2)

Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also $\mathbb{L} = \{\,\}$.

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \iff \quad x + \frac{p}{2} &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \iff \quad x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen (2)

Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also $\mathbb{L} = \{\,\}$.

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$

Dann ist $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$$\iff \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\iff \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Quadratische Gleichungen (2)

Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also $\mathbb{L} = \{\,\}$.

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$

$$\text{Dann ist } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\iff \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\iff \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Quadratische Gleichungen (2)

Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen der $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$:

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung, da das Quadrat auf der linken Seite stets nichtnegativ ist, also $\mathbb{L} = \{\,\}$.

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$

$$\text{Dann ist } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\iff \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\iff \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die quadratische Gleichung hat also

zwei verschiedene Lösungen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}$$

eine (doppelte) Lösung, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2} \right\}$$

keine Lösung, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

$$\mathbb{L} = \{ \}$$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\iff & x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
\iff & x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\iff & x = 2 \ \vee \ x = 1
\end{aligned}
$$

Somit: $\mathbb{L} = \{1, 2\}$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
\Longleftrightarrow\ & x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & x = 2 \ \vee\ x = 1
\end{aligned}
$$

Somit: $\mathbb{L} = \{1, 2\}$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - x + 2 = 0$.

Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\frac{7}{4} < 0$; es gibt also keine reelle Lösung.

Somit: $\mathbb{L} = \{\ \}$

Beispiel

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - x + 2 = 0$.

Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\frac{7}{4} < 0$; es gibt also keine reelle Lösung.

Somit: $\mathbb{L} = \{ \}$

Faktorisierung

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term faktorisieren, d. h. in Linearfaktoren zerlegen.

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$, so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Faktorisierung

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term faktorisieren, d. h. in Linearfaktoren zerlegen.

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$, so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Faktorisierung

Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term faktorisieren, d. h. in Linearfaktoren zerlegen.

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$, so gilt:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Beispiel (Faktorisierung)

Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ in Linearfaktoren.

Lösung der Gleichung $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ bzw. äquivalent dazu der zugehörigen Normalform $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$.

Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{49}{144} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \\ \iff & x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}} \\ \iff & x = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} \\ \iff & x = \frac{1}{2} \lor x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Beispiel (Faktorisierung)

Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ in Linearfaktoren.

Lösung der Gleichung $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ bzw. äquivalent dazu der zugehörigen Normalform $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$.

Für die Diskriminante gilt $\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{49}{144} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$
\begin{aligned}
& x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \\
\iff & x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}} \\
\iff & x = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} \\
\iff & x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Beispiel (Faktorisierung (Fortsetzung))

Wir erhalten also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\}$

Somit lässt sich der quadratische Term in Linearfaktoren zerlegen und es gilt

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Bemerkung

Der Vorfaktor a vor x^2 ist auch Vorfaktor der faktorisierten Gleichung.

Beispiel (Faktorisierung (Fortsetzung))

Wir erhalten also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$

Somit lässt sich der quadratische Term in Linearfaktoren zerlegen und es gilt

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Bemerkung

Der Vorfaktor a vor x^2 ist auch Vorfaktor der faktorisierten Gleichung.

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x(ax + b) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x = 0 \ \vee \ ax + b = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x = 0 \ \vee \ x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen“.

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx = 0 \\ \iff & x(ax+b) = 0 \\ \iff & x = 0 \ \vee \ ax + b = 0 \\ \iff & x = 0 \ \vee \ x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen“.

Spezialfälle quadratischer Gleichungen

Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx = 0 \\ \iff & x(ax + b) = 0 \\ \iff & x = 0 \ \vee \ ax + b = 0 \\ \iff & x = 0 \ \vee \ x = -\frac{b}{a}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen".

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x = 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 3x = 0 \\ \iff & x(2x+3) = 0 \\ \iff & x = 0 \ \vee \ 2x + 3 = 0 \\ \iff & x = 0 \ \vee \ x = -\frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Somit: $\mathbb{L} = \{0, -\frac{3}{2}\}$

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x = 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 3x = 0 \\ \iff & x(2x+3) = 0 \\ \iff & x = 0 \ \lor \ 2x + 3 = 0 \\ \iff & x = 0 \ \lor \ x = -\frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

Somit: $\mathbb{L} = \left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$

Binomische Formeln

Manchmal lassen sich quadratische Gleichungen auch einfach durch Anwendung der binomischen Formeln lösen.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$